

Mathematics. — *Bericht über die verschiedenen Methoden zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten. V.*

By E. BODEWIG. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1947.)

III. *Methode der Elimination.*

Nehmen wir an, im nicht-durchdividierten System $\mathfrak{A}x = \mathfrak{R}$ seien in den drei ersten Gleichungen mehrere der Koeffizienten $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ ungünstig. Multipliziert man dann die erste Gleichung mit der Unterdeterminante A_{11} , die zweite mit A_{21} , die dritte mit A_{31} und addiert, so verschwinden bekanntlich in der neuen Gleichung die Unbekannten x_2, x_3 . Ebenso verschwinden durch Multiplikation mit A_{12}, A_{22}, A_{32} bzw. A_{13}, A_{23}, A_{33} die Unbekannten x_1, x_3 bzw. x_1, x_2 in den zugehörigen Gleichungen. Wir bekommen also drei neue Gleichungen, in welchen gerade die störenden Koeffizienten fehlen, während die Koeffizienten von x_4, \dots, x_n natürlich noch vorhanden sind.

Wem die Multiplikation mit den genannten Unterdeterminanten etwas umständlich erscheint, besonders wegen der zusätzlichen Zahl von Dezimalen in den übrigen Koeffizienten, kann sich mit angenäherten Werte der A_{ik} begnügen. Dann werden allerdings in den neuen drei Gleichungen die Koeffizienten ausserhalb der Diagonale nicht mehr verschwinden, aber sie werden doch viel kleiner sein als bisher. *Die Ursache der Störung ist also behoben.*

Ergebnis. 1. Die Methode von CESARI verkleinert *alle* Koeffizienten ausserhalb der Diagonale. Sie ist die beste. Aber sie kostet $2n^3 + n^2$ Multiplikationen.

2. Der Kunstgriff von VAN DER CORPUT ist die einfachste und unübertröffene Methode, um *einen einzelnen* störenden Koeffizienten zu beseitigen, wenn gleichzeitig der symmetrische Koeffizient eine Vergrösserung ertragen kann. Unter derselben Voraussetzung kann man unter Umständen mehrere störende Koeffizienten beseitigen, und dadurch die maximale Spaltensumme verkleinern. Sie kostet $2n(n-1)$ Mult.

3. Die Methode der ganzen oder teilweisen Elimination beseitigt störende Koeffizienten, welche symmetrisch zueinander liegen. Sie kostet, wenn sie vollständig ausgeführt wird, $9n + 9$ bzw. $9n + 27$ Multiplikationen, ist also sehr billig. Für $n > 6$ bzw. 7 ist sie sogar billiger als die Methode von VAN DER CORPUT.

VIII. **Die modifizierte GAUSSsche Methode.**

In der vorliegenden Arbeit haben wir gezeigt, dass von allen Methoden zur Auflösung linearer Gleichungen, seien es direkte oder indirekte, be-

stimmte oder unbestimmte, die GAUSSsche bei weitem die beste ist, da sie die geringste Zahl von Rechenoperationen erfordert und dabei den eventuellen symmetrischen Bau des Gleichungssystems zur Vereinfachung der Rechnung berücksichtigt.

Auf der andern Seite sind mit dem GAUSSschen Verfahren, obwohl es theoretisch die geringste Rechenarbeit erfordert, auch einige *Beschwerden* verbunden, die wir nunmehr beseitigen wollen.

In der Praxis liegt die Sache nämlich meist etwas anders. Denn das System S_n hat meistens schon von vorneherein mehrstellige Koeffizienten a_{ik} . Zum mindesten ist dies aber der Fall nach Ausführung der ersten Elimination, der von x_1 , also beim System S_{n-1} , dessen Koeffizienten durch Multiplikation mit a_{i1}/a_{11} entstanden sind. Die Quotienten a'_{i2}/a'_{22} und die weiteren Quotienten können also überhaupt nicht genau berechnet werden. Bricht man sie aber nach der m -ten Dezimale ab, so sind die Koeffizienten a''_{ik} des Systems S_{n-2} auf eine vom einen Koeffizienten zum andern verschiedene Anzahl Dezimalen genau. Man kann nun entweder jeden Koeffizienten auf so viele genaue Dezimalen ansetzen wie es möglich ist, oder alle Koeffizienten auf die *gemeinsame*, also kleinste Zahl von genauen Dezimalen abrunden oder drittens alle Koeffizienten auf die gleiche, kleinste, *relative* Genauigkeit abrunden. Jede dieser drei Möglichkeiten hat aber ihre *Nachteile*.

Bei der ersten bekommt man schliesslich Koeffizienten mit ganz verschiedenen absoluten und relativen Genauigkeiten, also auch Dezimalstellen. Bei der zweiten und dritten Möglichkeit sinkt die Genauigkeit der Koeffizienten der aufeinander folgenden Systeme rasch, so dass, wenn $n = 20$ war, das System $S_1 : ax_{20} = b$ sehr ungenaue Koeffizienten a, b hat verglichen mit etwa denen von S_{n-1} . Die grosse absolute und relative Genauigkeit der Koeffizienten der vorhergehenden Gleichungen ist daher *zwecklos* gewesen.

Auch hat man zu bedenken, dass die Koeffizienten in \mathfrak{D}_l unterhalb der Diagonalen nicht genau verschwinden, sondern lediglich *der Beobachtung entgehen*. Denn schon die a'_{i1} sind nicht wirklich gleich Null, haben vielmehr Fehler, die wohl zuerst unbedeutend sind, die sich aber im Laufe der weiteren Rechnung so vergrössern, dass sie die Genauigkeit der x_i beeinflussen. Hat man doch zum Berechnen der letzten Zeile etwa $n^3/3$ Multiplikationen und ebenso viele Additionen nötig. Bei $n = 100$ gäbe das die Zahl 300000.

Bei Beginn der Rechnung ist also gar *nicht abzuschätzen, auf welche Genauigkeit man schliesslich die Lösungen bekommen wird*. Man weiss daher auch gar nicht, auf wieviele Dezimalen man die ersten Gleichungssysteme S_{n-1}, S_{n-2} anzusetzen hat. Entweder also rechnet man von vorneherein mit einer ungewöhnlich grossen Zahl von Stellen oder am Ende der Rechnung stellt sich heraus, dass die Genauigkeit der x_i zu klein ist.

Was ist bei diesem Verhalten zu tun? Nun, es bleibt nichts anderes übrig als den Näherungsvektor x in das ursprüngliche System S_n ein-

zusetzen und die Fehler f_1, f_2, \dots, f_n der einzelnen Gleichungen zu bestimmen. Dies erfordert

n^2 Multiplikationen und n^2 Additionen.

Dann setzt man den wahren Lösungsvektor gleich $\mathfrak{X} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und bekommt für \mathfrak{y} das System

$$S'_n : \mathfrak{A} \mathfrak{y} = \mathfrak{f}, \quad \text{wo } \mathfrak{f} = (f_1, \dots, f_n).$$

Dieses hat man dann wieder nach der GAUSSschen Methode zu reduzieren auf ein Dreieckssystem. Dies erfordert aber nur eine kleine neue Rechnung. Denn da die Gleichungsmatrix dieselbe geblieben ist, bleiben auch alle Multiplikationen mit $a_{i1}/a_{11}, a'_{i2}/a'_{22}$ usw. und Additionen auf den linken Seiten die gleichen, d.h. *die Dreiecksmatrix \mathfrak{D}_l bleibt unverändert*. Die genannten Operationen brauchen also nur in den absoluten Gliedern \mathfrak{f} neu ausgeführt zu werden.

Das neue Dreieckssystem lautet also

$$\mathfrak{D}_l \mathfrak{y} = \mathfrak{f}.$$

Seine Lösung kostet nach (I, 7 b) $n(n+1)/2$ Additionen und Multiplikationen, und $n(n-1)/2$ kostet die Ausführung der genannten Operationen an dem Fehlervektor \mathfrak{f} . Schliesslich erfordert das Einsetzen des Vektors \mathfrak{x} und die Bestimmung von $\mathfrak{f} : n^2$ Additionen und Multiplikationen. Im ganzen kostet daher die Iteration $2n^2$ Multipl. und $2n^2$ Additionen. Bei grösserem n spielen diese Anzahlen keine Rolle verglichen mit denen, die zur Reduktion von \mathfrak{A} auf \mathfrak{D}_l nötig sind.

Um immerhin nicht unnötig iterieren zu müssen, empfiehlt es sich, das System \mathfrak{D}_l auf *die höchste Anzahl Dezimalen* zu berechnen, die die Rechenmaschine zulässt. Denn es ist ja auf der Rechenmaschine, vor allem der automatischen, gleichgültig, wieviel Dezimalen die Faktoren und Summanden haben.

Das modifizierte GAUSSsche Verfahren besteht also darin, das GAUSSsche Verfahren und das Einsetzungsverfahren miteinander abwechseln zu lassen. *Es wird dadurch zu einer Art Iterationsverfahren*, da dieselben Operationen (an verschiedenen Vektoren) vorgenommen werden.

Es ist aber *jedem andern Iterationsverfahren dadurch überlegen* dass es infolge des GAUSSschen Algorithmus eine sehr geringe Zahl von Operationen erfordert, um schon ein ziemlich genaues Resultat zu erreichen, selbst bei grosser Zahl von Unbekannten. Es ist *dem reinen GAUSSschen Verfahren überlegen*, dadurch dass es eine beliebig grosse Genauigkeit zu erreichen gestattet und wie jedes Iterationsverfahren die Rechnung mittels Einsetzen kontrolliert und etwaige Fehler ausmerzt.

Es bleibt noch übrig, *das Verfahren zu vergleichen mit demjenigen der Berechnung von \mathfrak{A}^{-1} nach der Relation von SCHUR*, denn durch die Iteration wird das GAUSSsche Verfahren zu einer Art unbestimmter Verfahrens. Zunächst aber erfordert schon die Berechnung von \mathfrak{A}^{-1} dreimal so viel Operationen wie das Verfahren von GAUSS. Es kommt hinzu, dass

diese sich bei mehrstelligen Koeffizienten a_{ik} nicht genau und in einem Zuge durchführen lässt. Man muss daher, wenn man nach SCHUR gerechnet hat, ein- oder zweimal nach SCHULZ iterieren. Die Zahl der Operationen aber ist, wie wir wissen, bedeutend, nämlich $2n^3$ Multiplikationen und $2n^3$ Additionen. Hinzu käme dann noch die Multiplikation von \mathfrak{A}^{-1} mit r bzw. f .

- Ergebnis.* 1. Bei grossem n ist es notwendig, das GAUSSsche Verfahren durch Einsetzen der Näherungen zu iterieren. Dadurch verbindet man die Vorteile der direkten und indirekten Methoden.
2. Jede solche Iteration kostet zusätzlich $2n^2$ Multiplikationen und $2n^2$ Additionen.
3. Dieses modifizierte GAUSSsche Verfahren ist immer noch viel ökonomischer als die Methode mittels Berechnung von \mathfrak{A}^{-1} nach SCHUR (und SCHULZ).

Zusammenfassung.

1. Das beste aller Verfahren überhaupt ist dasjenige, welches GAUSS empfohlen hat.
 - a. Es erfordert bei weitem die geringste Zahl von Operationen.
 - b. Diese Zahl wird bei symmetrischen Systemen nochmals ungefähr halbiert.
 - c. Bei grossem n wird die transformierte Dreiecksmatrix ungenau, so dass das Verfahren modifiziert, d.h. iteriert werden muss, wodurch die Zahl der Operationen nur unwesentlich erhöht wird.
2. Die iterativen Methoden müssen prinzipiell verlassen werden. Sie empfehlen sich nur in seltenen Ausnahmefällen, nämlich bei stark vorherrschender Diagonale.
 - a. Die einfachste, eleganteste und ökonomischste ist dabei die Entwicklung der reziproken Matrix in eine FROBENIUS-NEUMANNsche Reihe, die in zwei Abarten zerfällt: eine mit linearer Konvergenz, aber einfacherer Multiplikation, eine andere mit quadratischer Konvergenz, aber verwickelterer Multiplikation.
 - b. Die Konvergenz kann noch durch mehrere Kunstgriffe verbessert werden.

Nachtrag.

Während des Druckes der vierten Mitteilung dieses Berichtes schickte mir Herr Dr. E. ANDERSEN (Kopenhagen) seine Arbeit zu, die sich ebenfalls mit linearen Gleichungen beschäftigt. (Lit. 21.) Das Hauptresultat der Arbeit ist der Beweis, dass die Methode von CHOLESKY zu denselben Gleichungen führt wie die Methode von GAUSS. Damit ist die Methode CHOLESKYS zum Abschluss gebracht.

Mit Hilfe unserer Bezeichnungen lautet der ANDERSEN'sche Beweis folgendermassen. Nach (I, 9a) ist bei der GAUSS'schen Methode

$$\mathfrak{A} = (\overline{\mathfrak{D}}_r)^{-1} \mathfrak{D}_l.$$

Setzt man hier $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} =$ einer symmetrischen Matrix, so ist wegen $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$:

$$\mathfrak{S} = (\overline{\mathfrak{D}}_r)^{-1} \mathfrak{D}_l = \mathfrak{D}'_l (\overline{\mathfrak{D}}_r)^{-1}, \quad \text{also} \quad \overline{\mathfrak{D}}_r = (\mathfrak{D}_l \overline{\mathfrak{D}}_r) (\mathfrak{D}'_l)^{-1}.$$

Nun ist $\overline{\mathfrak{D}}_r'$ eine linke Dreiecksmatrix, und da das Produkt zweier linken Matrizen wieder eine linke Matrix ist, so ist $\mathfrak{D}_l \overline{\mathfrak{D}}_r' = \mathfrak{D}_l^*$ eine linke Matrix. Daher

$$\overline{\mathfrak{D}}_r = \mathfrak{D}_l^* (\mathfrak{D}'_l)^{-1}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{D}_l^* = \overline{\mathfrak{D}}_r \mathfrak{D}'_l.$$

Nun ist \mathfrak{D}'_l eine rechte Matrix; somit ist die rechte Seite der vorigen Gleichung als Produkt zweier rechten Matrizen ebenfalls rechtsseitig: \mathfrak{D}_l^* ist also eine rechte Dreiecksmatrix, und, da sie gleichzeitig eine linke Matrix ist, so ist sie eine Diagonalmatrix \mathfrak{D} . Wir haben somit

$$\overline{\mathfrak{D}}_r = \mathfrak{D} (\mathfrak{D}'_l)^{-1}.$$

Dies setzen wir in die Gleichung für \mathfrak{S} ein:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{D}'_l \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{D}_l = (\mathfrak{D}'_l \sqrt{\mathfrak{D}^{-1}}) (\sqrt{\mathfrak{D}^{-1}} \mathfrak{D}_l).$$

Dies ist die Zerlegung von CHOLESKY, denn die linke Klammer ist die Transponierte der rechten.

Satz von ANDERSEN. 1) Jede Zeile der CHOLESKY'schen Dreiecksmatrix ist proportional der entsprechenden Zeile der GAUSS'schen Dreiecksmatrix \mathfrak{D}_l .

2) Die Proportionalitätsfaktoren sind die Quadratwurzeln aus den Diagonalelementen der GAUSS'schen Dreiecksmatrix \mathfrak{D}_l .

Der ANDERSEN'schen Arbeit entnehme ich ferner, dass auch GAUSS verschiedene Iterationsmethoden erdacht und nach den Angaben seines Schülers VON FREEDEN sie in seinen Vorlesungen vom Jahre 1843 erwähnt hat (Vgl. R. DEDEKIND, "Gauss in seinen Vorlesungen über die Methode der kleinsten Quadrate". Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Berlin, 1901, p. 49—59). Dass er aber die Iterationsmethoden verlassen hat, geht wohl daraus hervor, dass er keine dieser Methoden veröffentlichte, vielmehr nur die sukzessive Elimination angab. Jedenfalls sind unsere Bemerkungen auf p. 1114 (Proc. Vol. 50, 1947) der Mitteilung II dieses Berichtes in mehrfacher Hinsicht bestätigt.

Zweiter Nachtrag.

MORRIS' Treppenverfahren.

Vor kurzem hat J. MORRIS („An Escalator Process for the Solution of Linear Simultaneous Equations“, Philos. Magazine 37, 1946, p. 106) ein

Die c_{ik} berechnet man mittels der gewöhnlichen Matrix-Multiplikation. Demnach ist das Gleichungssystem

$$\mathfrak{C} \mathfrak{U} \mathfrak{r} = \mathfrak{C} \mathfrak{r} \dots \dots \dots (3)$$

dreieckig, lässt sich daher leicht lösen.

Es handelt sich also noch um die Gleichungen $\mathfrak{U}_k \eta_k = e_k$. Sie werden sukzessive gelöst. Man führt nämlich die Matrizen \mathfrak{B}_k ein:

$$\mathfrak{B}_k = \begin{bmatrix} \eta'_{k-1} & \vartheta'_1 \\ \eta'_{k-2} & \vartheta'_2 \\ \dots & \dots \\ \eta'_2 & \vartheta'_{k-2} \\ \mathfrak{D}_{2,k-2} & E_2 \end{bmatrix}.$$

Dann wird

$$\mathfrak{B}_k \mathfrak{U}_k \eta_k = \mathfrak{B}_k e_k = e_k \dots \dots \dots (4)$$

Anderseits ist wegen der Gleichungen (2):

$$\mathfrak{B}_k \mathfrak{U}_k = \begin{bmatrix} e'_{k-1} & d_{11} \\ e'_{k-2} & d_{21} & d_{22} \\ \dots & \dots & \dots \\ e'_2 & d_{k-2,1} \dots d_{k-2,k-2} \\ A_{k-1,1} & A_{k-1,2} \dots A_{k-1,k} \\ A_{k1} & A_{k2} \dots \dots \dots A_{kk} \end{bmatrix}.$$

Die i -te Gleichung des Systems $\mathfrak{B}_k \mathfrak{U}_k \eta_k = e_k$ enthält (wenn $i < k$) $i + 1$ Unbekannte und ist homogen. Nur die letzte Gleichung ist inhomogen und hat ebenfalls $k + 1$ Unbekannte. Damit bestimmt man aus der ersten Gleichung das Verhältnis zweier Komponenten von η_k , aus der zweiten Gleichung das Verhältnis dreier Komponenten usw. und schliesslich aus der letzten Gleichung die Komponenten selber.

Anzahl der Operationen. Schon die vorstehende Beschreibung lässt die Kompliziertheit des Verfahrens erkennen. Das wird augenfällig durch die Abzählung der bei ihm notwendigen Operationen. Wir bestimmen dieses Mal nur die Multiplikationen.

Zunächst erfordert die Produktmatrix $\mathfrak{B}_k \mathfrak{U}_k$ in der i -ten Zeile: $i(k-i)$ Multiplikationen, im ganzen also

$$\sum_{i=1}^{k-2} i(k-i) = \frac{1}{6} (k-1)(k-2)(k+3) = \frac{1}{6} (k^3 - 7k + 6) \text{ Multiplikationen.}$$

Die Gesamtheit aller genannten Matrizen kostet daher

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{6} (k^3 - 7k + 6) = \frac{1}{24} n^4 + \frac{1}{12} n^3 - \frac{1}{24} n^2 + \frac{5}{12} n \text{ Multiplikationen.}$$

Dies allein ist schon von höherer Grössenordnung als die gesamte Auflösung des Gleichungssystems nach GAUSS, die für symmetrische Systeme ja etwa $\frac{1}{6} n^3$ Multiplikationen erfordert.

Es kommt aber noch die Auflösung aller quasi-Dreieckssysteme (4): $\mathfrak{B}_k \mathfrak{U}_k \mathfrak{h}_k = e_k$ hinzu. Hier erfordert die i -te Zeile für $i < k$: i Multiplikationen, die k -te Zeile hingegen $k + 1$ Multiplikationen, so dass die Gesamtheit aller Systeme

$$\frac{1}{2} \sum_{k=3}^n (k^2 + k + 2) = \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{4}{3} n - 6 \text{ Multiplikationen}$$

erfordert.

Schliesslich kostet das System (3) auf der rechten Seite zur Bildung von $\mathfrak{C}r$: $n + (n - 1) + \dots + 2 = \frac{1}{2} (n^2 + n) + 1$ Multiplikationen, auf der linken Seite zur Bildung der Gleichungsmatrix $\mathfrak{C}\mathfrak{U}$, also zur Bildung der c_{ik} :

$$\sum_{i=1}^{n-2} i(n-i) = \frac{1}{6} n(n+1)(n-7) = \frac{1}{6} (n^3 - 6n^2 - 7n) \text{ Multiplikationen}$$

während die Auflösung des dreieckigen Systems (3) selbst laut (I, 7b) noch $(n^2 - n)/2$ Multiplikationen kostet.

Ergebnis. 1. Der Treppenprozess von MORRIS erfordert

$$\frac{1}{4} n^4 + \frac{5}{12} n^3 - \frac{1}{4} n^2 + \frac{7}{12} n - 1 \text{ Multiplikationen.}$$

2. Dies ist nach (I, 7') etwa $\frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{4} n^3$ Multiplikationen mehr als die Methode von GAUSS oder etwa $n/4$ mal so viel.

3. Die MORRIS'sche Methode ist somit unbrauchbar.

LITERATUR.

1. BODEWIG, E.: Comparison of some direct methods for Computing Determinants and inverse Matrices. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 50, No. 1, 49—57 (1947).
2. BOLTZ, H.: Entwicklungsverfahren zur Ausgleichung geodätischer Netze nach der Methode der kleinsten Quadrate. Veröffentlichungen des Preussischen geodätischen Instituts. Neue Folge, Nr. 90, Berlin 1923.
3. CESARI, L.: Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive. Rendic. Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Classe Scienze fis., mat., natur., vol. XXV, ser. 6a, Roma, 1937.
4. CIMMINO, GIANFRANCO: Calcolo approssimato per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari. La Ricerca Scientifica, ser. II, vol. 1. Neu abgedruckt in Pubblicazioni dell'Institut per le Applicazioni del Calcolo, No. 34, 1938.
5. FROBENIUS, G.: Ueber Matrizen aus positiven Elementen, Sitzungsber. der Berliner Akad. Wissenschaften. Mathem.-Physikal. Klasse, p. 474/5 (1908).
6. KACZMARZ, S.: Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. Bull. int. Acad. Polonaise Sciences, A, p. 355—7 (1937).
7. MISES, V. und POLLACZEK-GEIRINGER: Praktische Verfahren der Gleichungslösung. Zeitschrift f. angewandte Mathematik u. Mechik, Band 9, p. 62—77 (1929).
8. MORRIS, J.: A successive Approximation Process for Solving simultaneous linear Equations. Aeronautical Research Comm., Reports No. 1711, 1935.
9. QUADE, W.: Auflösung linearer Gleichungen durch Matrizeniteration. Bericht Mathemat.-Tagung Tübingen 1946, p. 123—4.

10. SCHULZ, GÜNTHER: Iterative Berechnung der reziproken Matrix. *Zeitschr. f. angewandte Mathematik u. Mechanik*, Band 13, p. 57—59 (1933).
11. SEIDEL, PH. L.: *Münchener Akad. Abhandl.*, p. 81—108 (1874).
12. SOUTHWELL: *Relaxation methods in Engineering Science. A Treatise on approximate Computation.* Oxford Univ. Press, 1940, 1943 (Unveränd. Druck).
13. JOSSA, F.: Risoluzione progressiva di un sistema di equazioni lineari. *Rendic. Accad. Scienze Fisiche, Matem., Napoli* (4), 10, 1940, p. 346—352.
14. BENOIT: Sur une méthode de résolution des équations normales etc. (Procédé du commandant CHOLESKY) *Bulletin géodésique*, No. 2, 1924.
15. BANACHIEWICZ, T.: Zur Berechnung der Determinanten wie auch der Inversen, und zu darauf basierten Auflösung linearer Gleichungen. *Acta Astronomica*, c 3, 1937, p. 41—67.
16. JENSEN, H.: Attempt at a systematic classification of some methods for the solution of normal equations. *Geodaetisk Institut, Meddelelse No. 18*, Kobenhavn, 1944.
17. ROMA, MARIA SOFIA: Il metodo dell'ortogonalizzazione per la risoluzione numerica dei sistemi di equazioni algebriche. *Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali*, no. 1, 1946. (Aufgenommen in: *Pubblicazioni dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo*, no. 189, Roma, 1947.)
18. CASSINIS, GINO: I metodi di H. BOLTZ per la Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari e il loro impiego nella compensazione delle triangolazioni. *Rivista Catasto e Servizi Tecnici Erariali*, no. 1, 1944.
19. SCHUR, I.: *Crelle's Journal*, Band 147, p. 217 (1917).
20. SCHMIDT, ERHARD: *Rendiconti Circolo matematico Palermo* (1908).
21. ANDERSEN, EINAR: Solution of great systems of normal equations together with an investigation of Andrae's Dot-Figure. An arithmetical-technical investigation. *Geodaetisk Instituts Skrifter*, 3. Raekke, vol. XI, (*Mémoires de l'institut géodésique de Danemark*, 3-me série, t. onzième), Kopenhagen (1947).