Mathematics. — *La définition d'un système hypercomplexe* [1]). By F. LOONSTRA. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of February 28, 1948.)

Dans son oeuvre „Moderne Algebra I" (2me édition) M. B. L. VAN DER WAERDEN développe la notion du système hypercomplexe (§ 14, p. 46): Soient R un anneau ayant un élément unité, G un espace vectoriel sur R, alors on appelle G un système hypercomplexe en définissant une multiplication pour les éléments $u, v, \ldots$ de G. Pour cette multiplication on demande, outre la loi associative et les lois distributives la propriété suivante:

$$(\alpha\, u)\, v = u\ (\alpha\, v) = \alpha\, (uv) \text{ pour } \alpha \subset R. \qquad (1)$$

Cependant cette dernière condition nous mène, comme M. G. W. DE VRIES a établi à une conférence du "Mathematisch Centrum", au résultat

$$(\alpha\, u)\, (\beta\, v) = \alpha\beta \cdot uv = \beta\alpha \cdot uv. \qquad (2)$$

D'abord il s'ensuit que (2) ne vaut que pour un anneau R commutatif, à moins que tous les uv soient nuls. Pour les anneaux des polynomes on serait réduit aux anneaux des coëfficients commutatifs, ce qui n'est pas l'intention. On pourra néanmoins éliminer la difficulté (2) en exigeant la condition plus faible (3) au lieu de (1):

$$(\alpha\, u_i)\, u = u_i\ (\alpha\, u) = \alpha\, (u_i\, u)\ . \qquad (3)$$

pour tout $\alpha \subset R, u \subset G$ et pour chaque élément u_i de la base de G. On aurra ainsi:

$$(\Sigma\, \alpha_j\, u_j)\, (\Sigma\, \beta_k\, u_k) = \sum_j \sum_k \alpha_j\, \beta_k\, (u_j\, u_k). \qquad (4)$$

de sorte qu'on pourra calculer les produits uv, si l'on connaît la relation $u_j u_k = \sum_i \gamma^i_{jk}\, u_i$ (5) pour chaque paire d'éléments de la base. Inversement, soient R un anneau (ayant un élément unité), G un espace vectoriel sur R, γ^i_{jk} des constants de structures, alors la multiplication définie par (4) et (5) est distributive par rapport à l'addition; en outre il s'ensuit de (4):

$$\begin{aligned}(\alpha\, u_i)\, u = (\alpha\, u_i)\, \Sigma\, \beta_k\, u_k = \Sigma\, \alpha\, \beta_k\, u_i\, u_k = u_i\, (\Sigma\, \alpha\, \beta_k\, u_k) = u_i\, (\alpha\, u) \\ = \alpha\, (u_i\, \Sigma\, \beta_k\, u_k) = \alpha\, (u_i\, u),\end{aligned}$$

de sorte que la condition (3) est remplie. Pour que la loi associative vaille il faut que $u_j(u_k u_i) = (u_j u_k) u_i$ pour toute combinaison possible de j, k et i. Il résulte une difficulté de la condition (3): en pasant, au moyen d'une transformation linéaire, à une autre base, la relation (3) n'est pas invariante.

---

[1]) C'est M. G. W. DE VRIES qui m'a donné lieu à cette remarque en rapport avec la validité de la relation (2).