Mathematics. — *Über mehrwertige Aussagenkalküle und mehrwertige engere Prädikatenkalküle.* I. By J. RIDDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of April 24, 1948.)

In einem neuerdings erschienenen Buche [1]) von S. A. KISS: *Transformations on lattices and structures of logic*, New York 1947, wird in inhaltlicher Weise eine 2^2-wertige Aussagenlogik eingeführt. Im folgenden wollen wir zeigen: 1° dass eine derartige Logik sich auch *formal* aufbauen lässt; 2° dass dieser Aufbau zu einem Aussagenlogik führt, welche *nicht nur eine 2^2-wertige Deutung, sondern sogar allgemein eine $2^n \times 2^m$-wertige Deutung* (n und m natürliche Zahlen) zulässt.

Eine Erweiterung des angewandten Verfahrens führt zu *Aussagenkalkülen mit* $2^{n_1} \times 2^{n_2} \times \ldots \times 2^{n_m}$*-wertigen Deutungen* ($n_1, n_2, \ldots, n_m$ natürliche Zahlen; m ganz und $\geqq 3$).

Völlig gleichartige Bemerkungen gelten für den engeren Prädikatenkalkül.

Erster Aufbau eines Aussagenkalküls $K^{(2)}$.

§ 1. Von den im folgenden durch grosse lateinische Buchstaben $A, B, C, \ldots$ [2]) angedeuteten *elementaren Aussagen* (*elementaren Kalkülformeln*) wird *nicht* angenommen, dass sie entweder wahr oder falsch sind. Wir lassen sowohl die Möglichkeit von endlich- wie die von abzählbar unendlich vielen elementaren Aussagen zu. Zu ihnen rechnen wir noch die durch die griechischen Buchstaben λ, ν, λ_2 und ν_2 dargestellten.

Als undefinierte *Grundverknüpfungen* nehmen wir zwei zweistellige Verknüpfungen $+$, $+_2$, und eine dritte einstellige Verknüpfung: *Komplement von*, angedeutet durch ein Akzent. Es gibt somit Kalkülformeln von der Art wie $X + Y$, $X +_2 Y$, X', Y'.

Einsetzungsregel E (erster Teil). Aus einer *Kalkülformel* erhält man wieder eine Kalkülformel, wenn man einen in ihr auftretenden grossen lateinischen Buchstaben durch eine Kalkülformel ersetzt (gleichgestaltete Buchstaben durch gleichgestaltete Formeln); dabei sind die grossen lateinischen Buchstaben, λ, ν, λ_2 und ν_2 als Kalkülformeln anzusehen, ferner mit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ auch $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R} +_2 \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{S}'$ [3]).

Definition 1. $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}$.

Definition 1ter. $\mathfrak{A} \rightarrow_3 \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' +_2 \mathfrak{B}$.

$\doteq \bar{\lambda}$, $\doteq \bar{\nu}$, $\doteq \bar{\lambda}_2$ und $\doteq \bar{\nu}_2$ sind *Modalitätszeichen*.

---

[1]) Ir. TH. W. TE NUYL stellte mir freundlichst sein Exemplar zur Verfügung.

[2]) Daneben auch: $A_1, B_1, C_1, \ldots; A_2, B_2, \ldots; \ldots; A_n, \ldots$ (n eine natürliche Zahl).

[3]) Grosse deutsche Buchstaben werden immer Kalkülformeln andeuten.

Definition 2. Ein Ausdruck, bestehend aus einer Kalkülformel, gefolgt durch eines der Modalitätszeichen, und entstanden nach endlichmaliger Anwendung von Axiomen, Einsetzungsregel E, Schlussschema S oder (und) Verbindungsregel V, ist *ein Theorem.*

So sind alle Axiome als Theoreme zu betrachten.

Einsetzungsregel E (zweiter Teil). Ist $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2]$ ein Theorem, und $\mathfrak{B}$ eine neue, aus $\mathfrak{A}$ mittels der Einsetzungsregel E (erster Teil) hervorgehende Kalkülformel, so liefert auch $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$ $[\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}_2]$ ein Theorem.

Erste Gruppe von Axiomen.

Axiom I. $[(X + X) \rightarrow X] \doteq \bar{\nu}$.

Axiom II. $[X \rightarrow (X + Y)] \doteq \bar{\nu}$.

Axiom III. $[(X + Y) \rightarrow (Y + X)] \doteq \bar{\nu}$.

Axiom IV. $[(Y \rightarrow Z) \rightarrow \{(X + Y) \rightarrow (X + Z)\}] \doteq \bar{\nu}$.

Axiom V. $(\lambda \rightarrow X) \doteq \bar{\nu}$.

Axiom VI. $(X \rightarrow \nu) \doteq \bar{\nu}$.

Schlussschema S. Sind $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2]$ und $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}$ $[(\mathfrak{A} \rightarrow_3 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}_2]$ Theoreme, so ist auch

$$\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu} \qquad [\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}_2]$$

ein Theorem.

Zweite Gruppe von Axiomen.

Axiom Iter. $[(X +_2 X) \rightarrow_3 X] \doteq \bar{\nu}_2$.

Axiom IIter. $[X \rightarrow_3 (X +_2 Y)] \doteq \bar{\nu}_2$.

Axiom IIIter. $[(X +_2 Y) \rightarrow_3 (Y +_2 X)] \doteq \bar{\nu}_2$.

Axiom IVter. $[(Y \rightarrow_3 Z) \rightarrow_3 \{(X +_2 Y) \rightarrow_3 (X +_2 Z)\}] \doteq \bar{\nu}_2$.

Axiom Vter. $[\lambda_2 \rightarrow_3 X] \doteq \bar{\nu}_2$.

Axiom VIter. $[X \rightarrow_3 \nu_2] \doteq \bar{\nu}_2$.

Verbindungsregel V. Sind

$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu}$$

Theoreme, so gilt dasselbe von

$$(\mathfrak{A} \rightarrow_3 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}_2 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B} \rightarrow_3 \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu}_2,$$

und umgekehrt.

Definition 3. Eine andere Schreibweise eines Theorems $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ $[\mathfrak{A}' \doteq \bar{\nu}]$ ist $\mathfrak{A}' \doteq \bar{\lambda}$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}]$; eine andere Schreibweise eines Theorems $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2$ $[\mathfrak{A}' \doteq \bar{\nu}_2]$ ist $\mathfrak{A}' \doteq \bar{\lambda}_2$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}_2]$.

Die mit den Regeln E und S aus der ersten Gruppe von Axiomen ableitbaren Theoreme stehen dual gegenüber den mit diesen Regeln aus der zweiten Gruppe von Axiomen ableitbaren Theoremen.

Daneben haben wir noch das weiter unten folgende Dualitätsprinzip.

Definition 4. $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}')'$.

Definition 4bis. $\mathfrak{A} \cdot_2 \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A}' +_2 \mathfrak{B}')'$.

Definition 1bis. $\mathfrak{A} \rightarrow_2 \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}$.

Definition 1quater. $\mathfrak{A} \rightarrow_4 \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' \cdot_2 \mathfrak{B}$.

Dualitätsprinzip [4]**.** Ist $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2]$ ein Theorem, so auch $\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}$ $[\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}_2]$; dabei gehe Kalkülformel $\mathfrak{B}$ aus Kalkülformel $\mathfrak{A}$ dadurch hervor, dass: α) $+$ durch $.$, und umgekehrt; $+_2$ durch $._2$, und umgekehrt, β) λ durch ν, und umgekehrt; λ_2 durch ν_2, und umgekehrt, γ) $\rightarrow$ durch $\rightarrow_2$, und umgekehrt; $\rightarrow_3$ durch $\rightarrow_4$, und umgekehrt, ersetzt werden; ev. vorkommende Akzenten sollen ungeändert bleiben. Ist, umgekehrt, bei denselben Kalkülformeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}$ $[\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}_2]$ ein Theorem, so auch $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2]$.

§ 2. Nach dem Vorigen wird es deutlich sein, *dass obiges System von Definitionen, Axiomen und Regeln dual steht gegenüber folgendem System, mit welchem es aequivalent ist* [5].

Die undefinierten Grundverknüpfungen werden diesmal angegeben durch $\cdot$, $\cdot_2$ und ein Akzent.

Einsetzungsregel E* (erster Teil). Aus einer Kalkülformel erhält man wieder eine Kalkülformel, wenn man einen in ihr auftretenden grossen lateinischen Buchstaben durch eine Kalkülformel ersetzt (gleichgestaltete Buchstaben durch gleichgestaltete Formeln); dabei sind die grossen lateinischen Buchstaben, λ, ν, λ_2 und ν_2 als Kalkülformeln anzusehen; ferner mit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ auch $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R} \cdot_2 \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{S}'$ [3]).

Statt der Definitionen 4 und 4bis brauchen wir hier die Definitionen 4* und 4*bis.

Definition 4*. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}')'$.

Definition 4*bis. $\mathfrak{A} +_2 \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A}' \cdot_2 \mathfrak{B}')'$.

Die Definitionen 1—1quater lassen wir auch hier gelten.

Statt Definition 2 kommt die

Definition 2*. Ein Ausdruch, bestehend aus einer Kalkülformel, gefolgt durch eines der Modalitätszeichen (§ 1), und entstanden nach endlichmaliger Anwendung der Axiome und Regeln E*, S*, V* dieses Paragraphen, ist *ein Theorem*.

Einsetzungsregel E* (zweiter Teil). Ist $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}_2]$ ein Theorem, und $\mathfrak{B}$ eine neue, aus $\mathfrak{A}$ mittels der Einsetzungsregel E* (erster Teil) hervorgehende Kalkülformel, so liefert auch $\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}$ $[\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}_2]$ ein Theorem.

Erste Gruppe von Axiomen.

Axiom Ibis. $[(X \cdot X) \rightarrow_2 X] \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom IIbis. $[X \rightarrow_2 (X \cdot Y)] \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom IIIbis. $[(X \cdot Y) \rightarrow_2 (Y \cdot X)] \doteq \bar{\lambda}$.

---

[4]) Zum Beweise vergleiche man J. RIDDER, Ueber den Aussagen- und den engeren Prädikatenkalkül I u. II. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam **49**, 1153—1164 (1946), und **50**, 24—30 (1947), insbes. 1153, 1154, 1156 und 26, 27 (Satz 42).

[5]) Vergleiche loc. cit. [4]), S. 27.

Axiom IVbis. $[(Y \rightarrow_2 Z) \rightarrow_2 \{(X \cdot Y) \rightarrow_2 (X \cdot Z)\}] \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom Vbis. $(\nu \rightarrow_2 X) \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom VIbis. $(X \rightarrow_2 \lambda) \doteq \bar{\lambda}$.

Schlussschema S*. Sind $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}_2]$ und $(\mathfrak{A} \rightarrow_2 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\lambda}$ $[(\mathfrak{A} \rightarrow_4 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\lambda}_2]$. Theoreme, so ist auch

$$\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda} \qquad [\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}_2]$$

ein Theorem.

Zweite Gruppe von Axiomen.

Axiom Iquater. $[(X \cdot_2 X) \rightarrow_4 X] \doteq \bar{\lambda}_2$.

Axiom IIquater. $[X \rightarrow_4 (X \cdot_2 Y)] \doteq \bar{\lambda}_2$.

Axiom IIIquater. $[(X \cdot_2 Y) \rightarrow_4 (Y \cdot_2 X)] \doteq \bar{\lambda}_2$.

Axiom IVquater. $[(Y \rightarrow_4 Z) \rightarrow_4 \{(X \cdot_2 Y) \rightarrow_4 (X \cdot_2 Z)\}] \doteq \bar{\lambda}_2$.

Axiom Vquater. $(\nu_2 \rightarrow_4 X) \doteq \bar{\lambda}_2$.

Axiom VIquater. $(X \rightarrow_4 \lambda_2) \doteq \bar{\lambda}_2$.

Verbindungsregel V*. Sind

$$(\mathfrak{A} \rightarrow_2 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\lambda} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B} \rightarrow_2 \mathfrak{A}) \doteq \bar{\lambda}$$

Theoreme, so gilt dasselbe von

$$(\mathfrak{A} \rightarrow_4 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\lambda}_2 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B} \rightarrow_4 \mathfrak{A}) \doteq \bar{\lambda}_2,$$

und umgekehrt.

Definition 3*. Eine andere Schreibweise eines Theorems $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}$ $[\mathfrak{A}' \doteq \bar{\lambda}]$ ist $\mathfrak{A}' \doteq \bar{\nu}$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}]$; eine andere Schreibweise eines Theorems $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}_2$ $[\mathfrak{A}' \doteq \bar{\lambda}_2]$ ist $\mathfrak{A}' \doteq \bar{\nu}_2$ $[\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2]$.

§ 3. Ausgehend von den undefinierten Grundbegriffen $+$, $\cdot_2$ und $'$ oder von den undefinierten Grundbegriffen $\cdot$, $+_2$ und $'$ erhält man leicht zwei weitere, mit den beiden vorigen Systemen aequivalente Systeme von Definitionen, Axiomen und Regeln.

§ 4. **Definition 5.** $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}$.

Definition 5bis. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A} \rightarrow_2 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\lambda}$.

Definition 5ter. $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A} \rightarrow_3 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}_2$.

Definition 5quater. $\mathfrak{A} \supset_2 \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A} \rightarrow_4 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\lambda}_2$.

Aus dem Axiomensystem des Par. 1 lassen sich die folgenden Sätze ableiten [6].

---

[6]) Für die Beweise vergleiche man loc. cit. [4]), S. 1154—1158.

Satz 1. *α*) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$ ist ein Theorem;

β) (Schlussschema) hat man als Theoreme $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, so gibt es auch ein Theorem $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$.

Satz 1ter. *α*) $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{A}$ ist ein Theorem;

β) (Schlussschema) hat man als Theoreme $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \subset_2 \mathfrak{C}$, so gibt es auch ein Theorem $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{C}$.

Satz 2. *α*) $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}$ (sind Theoreme);

β) (Schlussschema) aus den Theoremen $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ folgt, dass sich auch schreiben lässt $\mathfrak{C} \subset (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$.

Satz 2ter. *α*) $(\mathfrak{A} \cdot_2 \mathfrak{B}) \subset_2 \mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{A} \cdot_2 \mathfrak{B}) \subset_2 \mathfrak{B}$ (sind Theoreme);

β) (Schlussschema) aus den Theoremen $\mathfrak{C} \subset_2 \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C} \subset_2 \mathfrak{B}$ folgt, dass sich auch schreiben lässt $\mathfrak{C} \subset_2 (\mathfrak{A} \cdot_2 \mathfrak{B})$.

Satz 3. *α*) $\mathfrak{A} \subset (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ und $\mathfrak{B} \subset (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$;

β) (Schlussschema) aus $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ **und** $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ folgt, dass sich auch schreiben lässt $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{C}$.

Satz 3ter. *α*) $\mathfrak{A} \subset_2 (\mathfrak{A} +_2 \mathfrak{B})$ und $\mathfrak{B} \subset_2 (\mathfrak{A} +_2 \mathfrak{B})$;

β) (Schlussschema) aus $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{C}$ **und** $\mathfrak{B} \subset_2 \mathfrak{C}$ folgt, dass sich auch schreiben lässt $(\mathfrak{A} +_2 \mathfrak{B}) \subset_2 \mathfrak{C}$.

Satz 4. $\lambda \subset \mathfrak{A}$.

Satz 4ter. $\lambda_2 \subset_2 \mathfrak{A}$.

Satz 5. $\mathfrak{A} \subset \nu$.

Satz 5ter. $\mathfrak{A} \subset_2 \nu_2$.

Definition 6. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist eine kürzere Schreibweise von: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, oder — was wegen Verbindungsregel V, Definition 5 und Definition 5ter auf dasselbe hinauskommt — von: $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset_2 \mathfrak{A}$.

Satz 6. $[\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})] = [(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C})]$.

Satz 6ter. $[\mathfrak{A} \cdot_2 (\mathfrak{B} +_2 \mathfrak{C})] = [(\mathfrak{A} \cdot_2 \mathfrak{B}) +_2 (\mathfrak{A} \cdot_2 \mathfrak{C})]$.

Satz 7. *α*) $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}') = \lambda$; *β*) $(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') = \nu$.

Satz 7ter. *α*) $(\mathfrak{A} \cdot_2 \mathfrak{A}') = \lambda_2$; *β*) $(\mathfrak{A} +_2 \mathfrak{A}') = \nu_2$.

Satz 8 (Satz 8ter). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$, so auch $\mathfrak{A} = \nu$, und umgekehrt. [Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2$, so auch $\mathfrak{A} = \nu_2$, und umgekehrt].

Satz 9 (Satz 9ter). Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ [$\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$], und sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ neue, aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ mittels der Einsetzungsregel E (erster Teil) hervorgehende Kalkülformeln, wobei sowohl in $\mathfrak{A}$ wie in $\mathfrak{B}$ vorkommende, gleichgestaltete lateinische Buchstaben in beiden nicht oder in beiden an allen Stellen in gleicher Weise (d.h. durch gleichgestaltete Kalkülformeln) ersetzt sind, so hat man auch $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}$ [$\mathfrak{D} \subset_2 \mathfrak{E}$].

Satz 10. Sind $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ Theoreme, so gilt dasselbe von $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset_2 \mathfrak{A}$, und umgekehrt.

Zweiter Aufbau des Aussagenkalküls $K^{(2)}$.

§ 5. *Elementare Aussagen (elementare Kalkülformeln)* sollen wieder durch grosse lateinische Buchstaben [2]) und λ, ν, λ_2, ν_2 angedeutet werden.

Als undefinierte *Grundverknüpfungen* nehmen wir sechs zweistellige

Verknüpfungen $\subset$, $\subset_2$, $+$, $\cdot$, $+_2$, $\cdot_2$ und eine einstellige Verknüpfung: *Komplement von*, angedeutet durch ein Akzent.

Einsetzungsregel E_0 (erster Teil) habe den gleichen Wortlaut wie Einsetzungsregel E (erster Teil) mit dem Unterschiede, dass mit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ (neben $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R} +_2 \mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{S}'$) auch $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R} \cdot_2 \mathfrak{S}$ als Formeln betrachtet werden sollen.

Den Inhalt der Sätze 9 und 9^{ter} nehmen wir als zweiten Teil von Regel E_0 an. Also:

Einsetzungsregel E_0 (zweiter Teil). Lässt sich (auf Grund der nachfolgenden Axiome und Regel) schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ [$\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$], mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Kalkülformeln, und sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ mittels der Einsetzungsregel E_0 (erster Teil) hervorgehende Kalkülformeln, wobei sowohl in $\mathfrak{A}$ wie in $\mathfrak{B}$ vorkommende gleichgestaltete lateinische Buchstaben in beiden nicht oder in beiden an allen Stellen durch gleichgestaltete Kalkülformeln ersetzt sind, so lässt sich auch schreiben $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}$ [$\mathfrak{D} \subset_2 \mathfrak{E}$] [3]).

Definition 2_0. Ein Ausdruck bestehend aus zwei Kalkülformeln, getrennt durch $\subset$, $\supset$, $\subset_2$ oder $\supset_2$, und entstanden nach endlichmaliger Anwendung der hier folgenden Axiome, Einsetzungsregel E_0 oder (und) Verbindungsregel V_0 (nebst Definitionen), ist *ein Theorem*.

Definition 3_0. Eine andere Schreibweise eines Theorems $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$; eine andere Schreibweise eines Theorems $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{B} \supset_2 \mathfrak{A}$.

Erste und zweite Gruppe von Axiomen.

Axiom 1. α) $X \subset X$ (ist ein Theorem);

β) (Schlussschema) lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, so ist auch $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ ein Theorem.

Axiom 1^{ter}. α) $X \subset_2 X$;

β) (Schlussschema) lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset_2 \mathfrak{C}$, so ist auch $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{C}$ ein Theorem.

Axiom 2. α) $(X \cdot Y) \subset X$ und $(X \cdot Y) \subset Y$;

β) (Schlussschema) sind $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ Theoreme, so ist auch $\mathfrak{C} \subset (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$ ein Theorem.

Axiom 2^{ter}. α) $(X \cdot_2 Y) \subset_2 X$ und $(X \cdot_2 Y) \subset_2 Y$;

β) (Schlussschema) sind $\mathfrak{C} \subset_2 \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C} \subset_2 \mathfrak{B}$ Theoreme, so ist auch $\mathfrak{C} \subset_2 (\mathfrak{A} \cdot_2 \mathfrak{B})$ ein Theorem.

Axiom 3. α) $X \subset (X + Y)$ und $Y \subset (X + Y)$;

β) (Schlussschema) lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, so auch $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{C}$.

Axiom 3^{ter}. α) $X \subset_2 (X +_2 Y)$ und $Y \subset_2 (X +_2 Y)$;

β) (Schlussschema) lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \subset_2 \mathfrak{C}$, so auch $(\mathfrak{A} +_2 \mathfrak{B}) \subset_2 \mathfrak{C}$.

Axiom 4. $\lambda \subset X$.

Axiom 4^{ter}. $\lambda_2 \subset_2 X$.

Axiom 5. $X \subset \nu$.

Axiom 5^{ter}. $X \subset_2 \nu_2$.

Verbindungsregel V_0. Sind $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ Theoreme, so gilt dasselbe von $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset_2 \mathfrak{A}$, und umgekehrt.

Definition 6_0. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist eine kürzere Schreibweise von: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, oder — was wegen Verbindungsregel V_0 auf dasselbe hinauskommt — von: $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subset_2 \mathfrak{A}$.

Axiom 6. $[X \cdot (Y + Z)] = [(X \cdot Y) + (X \cdot Z)]$.

Axiom 6ter. $[X \cdot_2 (Y +_2 Z)] = [(X \cdot_2 Y) +_2 (X \cdot_2 Z)]$.

Axiom 7. α) $(X \cdot X') = \lambda$; β) $(X + X') = \nu$.

Axiom 7ter. α) $(X \cdot_2 X') = \lambda_2$; β) $(X +_2 X') = \nu_2$.

Die aus den Axiomen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und den Regeln E_0 und V_0 ableitbaren Theoreme stehen dual gegenüber den aus den Axiomen 1ter, 2ter, 3ter, 4ter, 5ter, 6ter, 7ter und den Regeln E_0 und V_0 ableitbaren Theoremen.

Daneben gibt es das unten folgende Dualitätsprinzip [7]).

Dualitätsprinzip. Zu jedem mit den Axiomen 1—7, 1ter—7ter, Verbindungsregel V_0 und Einsetzungsregel E_0 ableitbaren Satz erhält man einen dualen, wenn: α) in jeder vorkommenden Kalkülformel $+$ durch $\cdot$, $+_2$ durch $\cdot_2$, λ durch ν, λ_2 durch ν_2, und umgekehrt, ersetzt werden; β) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ durch $\overline{\mathfrak{B}} \subset \overline{\mathfrak{A}}$, und $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$ durch $\overline{\mathfrak{B}} \subset_2 \overline{\mathfrak{A}}$ ersetzt wird; dabei sollen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ die gemäss α) aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ hervorgehenden Kalkülformeln sein.

Satz 11. α) $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}')'$, und $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}')'$;
β) $(\mathfrak{A} +_2 \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}' \cdot_2 \mathfrak{B}')'$, und $(\mathfrak{A} \cdot_2 \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}' +_2 \mathfrak{B}')'$.

Definition 1. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}$.

Definition 1ter. $\mathfrak{A} \to_3 \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' +_2 \mathfrak{B}$.

Satz 12. (Schlussschema) Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \nu$ und $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) = \nu$, so auch $\mathfrak{B} = \nu$.

Satz 12ter. (Schlussschema) Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \nu_2$ und $(\mathfrak{A} \to_3 \mathfrak{B}) = \nu_2$, so auch $\mathfrak{B} = \nu_2$.

Satz 13. (Schlusschema) Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, so auch $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) = \nu$, und umgekehrt.

Satz 13ter. (Schlussschema) Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$, so auch $(\mathfrak{A} \to_3 \mathfrak{B}) = \nu$, und umgekehrt.

Satz A. $[(X + X) \to X] = \nu$.

Satz Ater. $[(X +_2 X) \to_3 X] = \nu_2$.

Satz B. $[X \to (X + Y)] = \nu$.

Satz Bter. $[X \to_3 (X +_2 Y)] = \nu_2$.

Satz C. $[(X + Y) \to (Y + X)] = \nu$.

Satz Cter. $[(X +_2 Y) \to_3 (Y +_2 X)] = \nu_2$.

Satz D. $[(Y \to Z) \to \{(X + Y) \to (X + Z)\}] = \nu$.

Satz Dter. $[(Y \to_3 Z) \to_3 \{(X +_2 Y) \to_3 (X +_2 Z)\}] = \nu_2$.

Satz E. $(\lambda \to X) = \nu$.

Satz Eter. $(\lambda_2 \to_3 X) = \nu_2$.

---

[7]) Für die Ableitung und die der weiteren Sätze dieses Par. vergl. loc. cit. [4]), S. 1160—1164.

Satz F. $(X \rightarrow \nu) = \nu$.

Satz Fter. $(X \rightarrow_3 \nu_2) = \nu_2$.

Satz 14 [Satz 14ter]. Lässt sich schreiben $\mathfrak{A} = \nu$ $[\mathfrak{A} = \nu_2]$, und ist $\mathfrak{B}$ eine mittels der Einsetzungsregel E_0 (erster Teil) aus $\mathfrak{A}$ hervorgehende Kalkülformel, so darf man auch schreiben $\mathfrak{B} = \nu$ $[\mathfrak{B} = \nu_2]$.

Satz 15. α) Ist $\mathfrak{A} = \nu$ $[\mathfrak{A} = \lambda]$ ein Theorem, so auch $\mathfrak{A}' = \lambda$ $[\mathfrak{A}' = \nu]$.

β) Ist $\mathfrak{A} = \nu_2$ $[\mathfrak{A} = \lambda_2]$ ein Theorem, so auch $\mathfrak{A}' = \lambda_2$ $[\mathfrak{A}' = \nu_2]$.

Aus Verbindungsregel V_0 und den Sätzen 13, 13ter folgt:

Satz 16. Sind

$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \nu \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}) = \nu$$

Theoreme, so auch

$$(\mathfrak{A} \rightarrow_3 \mathfrak{B}) = \nu_2 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{B} \rightarrow_3 \mathfrak{A}) = \nu_2,$$

und umgekehrt.

Definition 7_0 (Einführung der Modalitätszeichen). Die Schreibweisen $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ und $\mathfrak{A} = \nu$ sollen einander ersetzen können; ebenso $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}$ und $\mathfrak{A} = \lambda$; ebenso $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ und $\mathfrak{A} = \nu_2$; schliesslich auch $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}_2$ und $\mathfrak{A} = \lambda_2$.

§ 6. Aus den Sätzen 1—7, 1ter—7ter, 9, 9ter, 10 einerseits und den Sätzen 12, 12ter, A—F, Ater—Fter, 14, 14ter, 16 andererseits, nebst den Definitionen und den Sätzen 8, 8ter, 11, 13, 13ter und 15, folgt unmittelbar, *dass das Axiomensystem I—VI, Iter—VIter mit der Einsetzungsregel E, Schlussschema S und Verbindungsregel V völlig gleichwertig ist mit dem Axiomensystem 1—7, 1ter—7ter mit der Einsetzungsregel E_0 und der Verbindungsregel V_0*. Beim ersten System sind $\doteq \bar{\lambda}$, $\doteq \bar{\lambda}_2$, $\cdot$, $\cdot_2$, $\rightarrow$, $\rightarrow_j$ $(j = 2, 3, 4)$ und $\subset$, $\subset_2$ $\supset$, $\supset_2$ abgeleitete Verknüpfungen, beim zweiten System sind es $\supset$, $\supset_2$ und $\doteq \bar{\nu}$, $\doteq \bar{\lambda}$, $\doteq \bar{\nu}_2$, $\doteq \bar{\lambda}_2$, $\rightarrow$, $\rightarrow_j$ $(j = 2, 3, 4)$.

§ 7. Es wird hiernach nicht schwer sein drei weitere Axiomensysteme zu formulieren, gleichwertig mit dem System von § 5, und in welchen die undefinierten Grundverknüpfungen dieselben sind wie in § 5 mit Ausnahme von $\subset$ und $\subset_2$, welche bzw. ersetzt sind durch $\supset$ und $\supset_2$; $\supset$ und $\subset_2$; $\subset$ und $\supset_2$.

Widerspruchsfreiheit und Deutungen der Axiomensysteme.

§ 8. *Die beiden einander gleichwertigen Axiomensysteme der Paragraphen 1 und 5 sind widerspruchsfrei* in dem Sinne, dass $X \doteq \bar{\nu}$ (oder $X = \nu$), $X \doteq \bar{\nu}_2$ (oder $X = \nu_2$), $X \doteq \bar{\lambda}$ (oder $X = \lambda$) und $X \doteq \bar{\lambda}_2$ (oder $X = \lambda_2$) in den Systemen nicht ableitbar sind.

Um diese Widerspruchsfreiheit einzusehen fügen wir den (nach Annahme endlich oder abzählbar unendlich vielen) elementaren Kalkülformeln $A, B, \ldots, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ Paare arithmetischer Werte zu, welche nur (0,0) oder (1,0) oder (0,1) oder (1,1) sein sollen. $A + B$ $[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}]$ ordnen wir das Wertepaar (0,0) zu, falls auch A [$\mathfrak{A}$] und B [$\mathfrak{B}$] das Paar (0,0) zugeordnet ist; die weiteren Zuordnungen sind aus den drei folgenden Tabellen ersichtlich.

$+$	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,1)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(1,1)	(0,1)	(1,1)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)

$+_2$	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)
(0,1)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(1,1)	(1,0)	(1,0)	(1,1)	(1,1)

	/
(0,0)	(1,1)
(1,0)	(0,1)
(0,1)	(1,0)
(1,1)	(0,0)

Welche Wertepaare auch die Kalkülformeln X, Y, Z zugeordnet sind, in allen Fällen ist den in den Axiomen I—IV im Vordergliede vorkommenden Kalkülformeln dasselbe Wertepaar, und zwar (1,1) zugeordnet; daneben ist den in den Axiomen Iter—IVter im Vordergliede auftretenden Kalkülformeln immer das Wertepaar (1,0) zugeordnet.

λ sei immer das Wertepaar (0,0), ν das Wertepaar (1,1), λ_2 das Wertepaar (0,1) und ν_2 das Wertepaar (1,0) zugeordnet.

Den im Vordergliede von Axiom V und VI vorkommenden Kalkülformeln sind nun immer das Wertepaar (1,1), den im Vordergliede von Axiom Vter und VIter vorkommenden Formeln immer das Wertepaar (1,0) zugeordnet.

Wendet man auf die in $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ [$\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2$] vorkommende Kalkülformel $\mathfrak{A}$ die Einsetzungsregel E an, wobei sie in $\mathfrak{B}$ übergehen soll, und ist $\mathfrak{A}$ immer das Wertepaar (1,1) [das Wertepaar (1,0)] zugeordnet (wie auch die in ihr auftretenden, durch lateinische Buchstaben dargestellten, elementaren Aussagen bewertet sind), so ist klar, dass dasselbe von $\mathfrak{B}$ gilt.

Anwendung des Schlussschemas S führt von $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ und $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}$, wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ immer (1,1) zugeordnet sein soll (wie auch die in ihr auftretenden, durch lateinischen Buchstaben dargestellten, elementaren Aussagen bewertet sind), zu $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$, wobei für $\mathfrak{B}$ dasselbe gilt; von $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2$ und $(\mathfrak{A} \rightarrow_3 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}_2$, wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \rightarrow_3 \mathfrak{B}$ immer (1,0) zugeordnet sein soll, führt Schema S zu $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}_2$, wobei für $\mathfrak{B}$ dasselbe gilt.

Verbindungsregel V führt von $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}$ und $(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu}$, bei welchen den Vordergliedern immer das Wertepaar (1,1) zugeordnet sein soll, d.h. bei welchen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ immer *gleiche* (vielleicht wechselnde) Wertepaare zugeordnet sind, zu $(\mathfrak{A} \rightarrow_3 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}_2$ und $(\mathfrak{B} \rightarrow_3 \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu}_2$, be welchen den Vordergliedern immer das Wertepaar (1,0) zukommt. Auch die Umkehrung gilt.

In einem Theorem $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ ist somit $\mathfrak{A}$ immer das Wertepaar (1,1), in einem Theorem $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2$ ist $\mathfrak{A}$ immer das Wertepaar (1,0) zugeordnet, während wegen Definition 3 in Theoremen $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}$ oder $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}_2$ die immer zugeordneten Wertepaare (0,0) bzw. (0,1) sind.

$X \doteq \bar{\nu}$, $X \doteq \bar{\lambda}$, $X \doteq \bar{\nu}_2$ und $X \doteq \bar{\lambda}_2$ sind dadurch nicht ableitbar, denn

X kann willkürlich eines des Wertepaare (1,1), (1,0), (0,1), (0,0) zugeordnet werden. Daraus folgt unsere Behauptung [8]).

§ 9. Ein zweites Beweisverfahren, welches das vorige als Spezialfall umfasst, ist folgendes. Wir betrachten zwei Mengen M, N von endlich vielen (m bzw. n) diskreten Elementen (m und $n \geqq 1$) [9]). Den durch grosse lateinische Buchstaben angedeuteten elementaren Kalkülformeln können als „Werte" die Paare von Teilmengen von M bzw. N zugeordnet werden (die Mengen M und N und ihre leeren Teilmengen mit eingeschlossen) [10]).

Beweisen wir diesmal die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems von § 5.

$A + B$ $[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}]$ ordnen wir den „Wert" $(T_1 + T_2, U_1 + U_2)$ zu, falls A $[\mathfrak{A}]$ das Mengenpaar (T_1, U_1), B $[\mathfrak{B}]$ das Mengenpaar (T_2, U_2) zugeordnet ist; $A \cdot B$ $[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}]$ sei dann das Paar $(T_1 \cdot T_2, U_1 \cdot U_2)$ als „Wert" zugeordnet. Ausserdem seien dann $A +_2 B$ $[\mathfrak{A} +_2 \mathfrak{B}]$ und $A \cdot_2 B$ $[\mathfrak{A} \cdot_2 \mathfrak{B}]$ bzw. die Mengenpaare $(T_1 + T_2, U_1 \cdot U_2)$ und $(T_1 \cdot T_2, U_1 + U_2)$ zugeordnet. A' $[\mathfrak{A}']$ sei das Paar von Komplementär-

---

8) *Die Verbindungsregel V ist von den Axiomen I—VI, I^{ter}—VI^{ter}, Einsetzungsregel E und Schlussschema S unabhängig.* Dies zeigt sich wie folgt. Den elementaren Kalkülformeln A, B, ..., A_1, ..., A_n, ... seien Paare arithmetischer Werte zugeordnet, welche nur (0,0), (0,1), (1,0) oder (1,1) sein sollen. Für die Grundverknüpfungen sollen wieder die im Texte gegebenen Zuordnungstabellen gelten. Für λ_2 seien als Zuordnungen die Wertepaare (0,0) und (0,1), für ν_2 die Wertepaare (1,0) und (1,1) möglich, während λ und ν nur (0,0) bzw. nur (1,1) zugeordnet sei. Wir denken uns nun bei der Ableitung von Theoremen die Verbindungsregel V nicht benutzt. Dann werden den in Theoremen $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}_2$ auftretenden Kalkülformeln $\mathfrak{A}$ immer eines der Wertepaare (1,0), (1,1), den in Theoremen $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ auftretenden Kalkülformeln $\mathfrak{A}$ immer das Wertepaar (1,1) zugeordnet sein.

Die Verbindungsregel V ist nun keine Folge der Axiome, Regel E und Schema S. Denn sonst müsste die Existenz von Theoremen $(\mathfrak{A} \rightarrow_3 \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}_2$ und $(\mathfrak{B} \rightarrow_3 \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu}_2$ immer zur Folge haben, dass auch $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \doteq \bar{\nu}$ und $(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}) \doteq \bar{\nu}$ Theoreme wären. Dies ist jedoch nicht der Fall. Denn $[\lambda_2 \rightarrow_3 (X +_2 X')'] \doteq \bar{\nu}_2$ und $[(X +_2 X')' \rightarrow_3 \lambda_2] \doteq \bar{\nu}_2$ sind (ohne Regel V) ableitbare Theoreme. Ordnen wir X (0,0), λ_2 (0,0) zu, so ist $(X +_2 X') + \lambda_2$ das Wertepaar (1,0) zugeordnet; es gibt somit kein Theorem der Form $[(X +_2 X')' \rightarrow \lambda_2] \doteq \bar{\nu}$, was doch der Fall sein müsste, wenn Regel V ableitbar wäre.

Aus dem Axiomensystem des Par. 1 (also mit Einschluss der Verbindungsregel V) folgt das Theorem (Distributivitätssatz): *Immer ist* $[\varphi \circ (\psi \,\square\, \chi)] = [(\varphi \circ \psi) \,\square\, (\varphi \circ \chi)]$; *dabei stellt* $\circ$, *und ebenso* $\square$, *eine willkürliche der Grundverknüpfungen* $+$, $+_2$, $.$, $._2$ *dar, und stellt* φ, *ebenso wie* ψ *und* χ, *eine willkürliche der elementaren Kalkülformeln* λ, ν, λ_2, ν_2 *dar.* Zum Beweise beachte man die Theoreme: $\lambda_2 + \nu_2 = \nu$, und $\lambda +_2 \nu = \nu_2$, und die dualen Theoreme: $\nu_2 \,.\, \lambda_2 = \lambda$ bzw. $\nu \,._2\, \lambda = \lambda_2$. (Das erste dieser Theoreme folgt mit Einsetzungsregel E_0 aus Axiom 7, β).

9) Zum ersten Verfahren kommt man durch Betrachtung von Mengen M, N, deren jede aus einem einzelnen Element aufgebaut ist; die Paare von Teilmengen von M und N: $\{0,0\}$, $\{0, N\}$, $\{M, 0\}$ und $\{M, N\}$ seien bzw. mit (0,0), (0,1), (1,0) und (1,1) benannt.

10) Die Anzahl dieser Paare ist somit $2^m \times 2^n$.

mengen $(M - T_1, M - T_2)$ als „Wert" zugeordnet, falls A $[\mathfrak{A}]$ das Paar (T_1, T_2) zugeordnet ist.

λ sei als einzig möglicher „Wert" das Mengenpaar (0,0), ν das Paar (M, N) zugeordnet; schliesslich seien diese einzig möglichen „Werte" für λ_2 und ν_2 bzw. $(0, N)$ und $(M, 0)$.

$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ soll nur möglich sein, wenn für die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemäss obigen Vorschriften zugeordneten Mengenpaare (T, U) bzw. (T_0, U_0) immer T eine Teilmenge von T_0, U eine Teilmenge von U_0 ist, wie auch den in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vorkommenden, durch grosse lateinische Buchstaben angedeuteten elementaren Kalkülformeln Paare von Teilmengen von M bzw. N zugeordnet sind.

$\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$ soll nur möglich sein, wenn für die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemäss obigen Vorschriften zugeordneten Mengenpaare (T, U) bzw. (T_0, U_0) immer T eine Teilmenge von T_0, U_0 eine Teilmenge von U ist.

Es ist nun sofort klar, dass die Axiome 1—7, und 1ter—7ter sich in richtige Behauptungen über die Teilmengen von M und N übersetzen; dasselbe gilt für die Regel V_0.

Betrachten wir noch die Einsetzungsregel E_0. Ist $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ $[\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}]$ ein Theorem, so gilt für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleichzeitig zugeordnete Mengenpaare (T_1, U_1) bzw. (T_2, U_2), dass T_1 Teilmenge von T_2, U_1 Teilmenge von U_2 ist [dass T_1 Teilmenge von T_2, U_2 Teilmenge von U_1 ist]; das bleibt so für die Kalkülformeln $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, falls $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}$ $[\mathfrak{D} \subset_2 \mathfrak{E}]$ mittels Regel E_0 aus $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ [aus $\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B}$] hervorgeht.

Aber daraus folgt, dass $X \dot{=} \bar{\nu}$ oder $X = \nu$ oder „$X \subset \nu$ und $\nu \subset X$" [dass $X \dot{=} \bar{\nu}_2$ oder $X = \nu_2$ oder „$X \subset \nu_2$ und $\nu_2 \subset X$"] nicht ableitbar ist. Denn jeder „Wert" von X, welcher nicht gleich dem Mengenpaare (M, N) ist [welcher nicht gleich dem Mengenpaare $(M, 0)$ ist], gibt eine unrichtige Behauptung über endliche Mengen.

Dass $X \dot{=} \bar{\lambda}$ und $X \dot{=} \bar{\lambda}_2$ nicht ableitbar sind, folgt daraus, dass dasselbe von $X = \lambda$ oder $X' = \nu$ und von $X = \lambda_2$ oder $X' = \nu_2$ gilt.

Dieses zweite Beweisverfahren zeigt, *dass die acht im Vorigen betrachteten aequivalenten Axiomensysteme einen* $2^m \times 2^n$*-wertigen Aussagenkalkül liefern (m und n natürliche Zahlen)*, welchen wir als *das Produkt eines* 2^m*-wertigen und eines* 2^n*-wertigen Aussagenkalküls* auffassen können; jeder dieser beiden letzten Kalküle lässt sich durch die loc. cit. [4]) gegebenen Axiomensysteme für den erweiterten RUSSELL–WHITEHEADschen Aussagenkalkül charakterisieren.