Mathematics. — *Sur un théorème de* M. J. F. KOKSMA *concernant la théorie des approximations diophantiques*. By A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of March 20, 1948.)

§ 1. *Introduction.* — M. J. F. KOKSMA a montré un théorème général concernant un problème de la théorie des approximations diophantiques [1]). Ses considérations se rapportent aux espaces euclidiens. Nous montrons dans ce travail que ce théorème peut s'exprimer dans une forme abstraite concernant des espaces beaucoup plus généraux, à savoir les groupes topologiques compacts. On ne suppose pas que ce sont des espaces métriques. On verra donc que la possibilité peut se présenter de transposer des théorèmes concernant la théorie des nombres en des théorèmes topologiques d'un caractère spécial. La question se pose si l'inverse est possible.

Rappelons quelques notions préliminaires.

Un ensemble d'éléments s'appelle un groupe topologique G si [2]):

a) G est un groupe abstrait;

b) G est un espace topologique;

c) les opérations-de-groupe sont continues dans G.

Dans le théorème principal le groupe sera écrit dans la forme multiplicative. Afin de déterminer une topologie dans G on n'a pas besoin de se donner un système de voisinages pour l'espace entier: l'homogénéité de l'espace cause qu'il suffit de se donner un système de voisinages complet de l'élément neutre; la condition *c* impose une restriction à ce système. Dans ce qui suit on ne considère donc que des voisinages de l'élément neutre.

Un espace topologique est appelé compact si pour chaque sous-ensemble infini de cet espace il existe au moins un point d'accumulation appartenant à cet ensemble. Un espace est appelé localement-compact si chaque point possède des voisinages fermés arbitrairement petits compacts.

Pour tout ce qui suit il est de première importance que, selon la théorie de HAAR, il existe sur tout groupe localement compact une mesure invariante à droite et, à un facteur constant près, une seule. Cette mesure m satisfait donc à

$$m(A) = m(A\,a) \qquad (A \subset G)$$

---

[1]) Ueber die asymptotische Verteilung eines beliebigen Systems (f_ν) von n reellen Funktionen f_ν der m ganzzahligen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ modulo Eins. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **43**, 211—214 (1940).

[2]) Voir. N. BOURBAKI, Topologie générale. Act. Sci. et Ind. no. 916 (Paris 1942).

pour tout $a \in G$ [3]). C'est l'existence de cette mesure qui est essentielle dans ce qui suit, non la compacité locale [4]).

Remarquons qu'il ne sera pas supposé que l'espace G peut être métrisé. Cependant, il est toujours possible de définir une structure uniforme dans un groupe topologique, ce qui peut, pour beaucoup de questions, remplacer la métrique [5]). Nous n'y ferons pas usage dans ce qui suit.

§ 2. *Le théorème principal.* — Soit G un groupe topologique, produit direct des groupes topologiques G_i $(i = 1, 2, \ldots)$

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} G_i. \qquad \qquad (1)$$

Eléments de G sont les suites $(a_1, a_2, \ldots)$ telles que $a_i \in G_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Si e_i désigne l'élément neutre de G_i, alors $e = (e_1, e_2, \ldots)$ est l'élément neutre de G.

Si A et B sont des sous-ensembles de G_i, on entend par AB l'ensemble (sous-ensemble de G_i) de tous les éléments $\alpha\beta$ si α parcourt A et β parcourt B [6]).

Si A est un sous-ensemble de G_i on entend par A^{-1} l'ensemble de tous les éléments α^{-1} si $\alpha \in A$.

Nous supposons que les G_i, à un nombre fini d'eux près, sont compacts; ceux qui ne sont pas compacts seront supposés localement compacts. Le groupe G est alors localement compact [7]), de sorte que sur G il existe une mesure invariante à droite m.

Soient pour $i = 1, 2, \ldots$. U_i un voisinage de e_i et $p_i \in G_i$; l'ensemble des points $u = (u_1, u_2, \ldots)$ de G, satisfaisant à

$$u_i^{-1} p_i \in U_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

sera appelé un intervalle autour du point $p = (p_1, p_2, \ldots)$ [8]). De même

[3]) A. WEIL, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Act. Sci. et Ind. no. 869 (Paris 1940) p. 34.

[4]) L'existence d'une mesure invariante dans un groupe est en un certain sens caractéristique pour les groupes localement compacts. Voir WEIL, l.c. [3]) p. 140 e.s.

[5]) Voir p. ex. A. WEIL, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. Act. Sci. et Ind. no. 551 (Paris 1937) pp. 12, 23.

[6]) Il faut bien distinguer la notion AB de la notion $A.B$, qui signifie l'intersection des ensembles A et B.

[7]) Théorème de TYCHONOFF. Voir N BOURBAKI, Topologie générale. Act. Sci. et Ind. no. 858 (Paris 1940) pp. 63 et 65.

[8]) Remarquons que cette définition sans plus n'assure pas qu'un intervalle est un ensemble ouvert dans G si tous les U_i sont ouverts dans G_i. Pour cela il faut et il suffit qu'on a $U_i \neq G_i$ seulement pour un nombre fini de valeurs de i, de sorte que $U_i = G_i$ pour presque tous les i. La topologie dans G est fixée comme il suit. Si $U_1, \ldots, U_r$ sont des voisinages respectivement de $e_1, \ldots, e_r$, un voisinage U de e dans G est l'ensemble des points $(x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_j, \ldots)$ où $x_i \in U_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ tandis que x_j pour $j > r$ parcourt l'espace G_j tout entier. Dans les démonstrations qui suivent nous n'avons pas besoin de cette hypothèse concernant les U_i (qui aurait, à cause de (4), des conséquences pour les V_i) de sorte que nous ne l'avons pas supposée.

l'ensemble des points $v = (v_1, v_2, \ldots)$ satisfaisant à

$$v_i p_i^{-1} \in U_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Nous n'avons pas besoin de distinguer entre ces deux types d'intervalles.

Enoncons maintenant le théorème principal.

Suppositions.

Soient U_i $(i = 1, 2, \ldots)$ un voisinage, restant fixé dans ce qui suit, de e_i et Q l'intervalle des points $a = (a_1, a_2, \ldots)$ de G tels que

$$a_i \in U_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dèsignons par Q^2 l'intervalle, déterminé par les relations

$$\beta_i \in U_i^2 = U_i\, U_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Soit N un ensemble dénombrable de points $x_1, x_2, \ldots$ dans un espace E, restant indéterminé; on ne suppose pas que N se compose que des points isolés.

Soit Y un ensemble dans un espace F, restant aussi indéterminé. Une condition que nous exprimons ci-dessous, impose une restriction à Y.

Soit $K(x)$ une fonction, définie pour $x \in N$, qui prend comme valeurs 0 ou des nombres entiers > 0.

Soit $F(x, y)$ une fonction, définie pour $x \in N$, $y \in Y$, prenant ses valeurs dans G.

Soit donné pour chaque $x \in N$ et pour $i = 1, 2, \ldots$ un voisinage $V_i(x)$ de e_i tel que

$$V_i(x) \subset U_i \qquad (x \in N;\, i = 1, 2, \ldots). \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Supposons que, pour chaque $x \in N$, ils existent au plus $K(x)$ points $y \in Y$ tels que le point $P = P(x, y) = F(x, y)$ à coordonnées $p_1, p_2, \ldots$ $(p_i \in G_i)$ soit un point de Q^2.

Soit $S_i(x)$ l'ensemble des points de G dont la i-ième coordonnée appartient à $U_i - V_i(x)$ et soit [9])

$$L_i(x) \equiv Q \cdot C S_i(x).$$

En vertu de (4) $L_i(x)$ se compose des points de Q dont la i-ième coordonnée appartient à $V_i(x)$.

Soit $I(x)$ l'intervalle dans G autour de e déterminé par $V_i(x)$:

$$\gamma_i \in V_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Soit $I^{-1}(x)$ l'intervalle déterminé de façon analogue par $V_i^{-1}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ [10]).

---

[9]) Par CA sera dèsigné l'ensemble complémentaire de A par rapport à l'espace considéré.

[10]) La condition c, imposée aux groupes topologiques, implique que V^{-1} est un voisinage.

Supposons enfin que les séries

$$\sum_{x \in N} K(x)\, m(I^{-1}(x)) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\sum_{x \in N} \underset{1 \leq i < \infty}{\text{fin sup}}\, m(L_i(x)) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

convergent.

Théorème.

Pour presque tous[11] *les points* $a = (a_1, a_2, \ldots)$ *de* Q *ils existent au plus un nombre fini de points* $x \in N$ *pour lesquels il existe un* $y \in Y$ *tel que*

$$a^{-1} F(x, y) \in V(x),$$

c'est à dire

$$a_i^{-1} p_i \in V_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Démonstration.

Soit donné un $x \in N$. Supposons $a \in Q$ tel que (7) est vrai pour cet x et pour un certain $y \in Y$. a appartient à l'intervalle autour de P qui se compose des points $u = (u_1, u_2, \ldots)$ pour lesquels on a

$$u_i^{-1} p_i \in V_i(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

La mesure de cet intervalle vaut, à cause de l'invariance à droite,

$$m(I^{-1}(x)).$$

Il y a alors deux cas:

I. P appartient à Q^2. En vertu de la supposition cela n'est possible que pour au plus $K(x)$ points $y \in Y$.

II. P n'appartient pas à Q^2. Il suit alors de (3) qu'il existe un i_0 tel que

$$p_{i_0} \text{ non dans } U_{i_0}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Nous verrons qu'il en résulte

$$a_{i_0} \text{ non dans } U_{i_0} - V_{i_0}(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

En effet, si

$$a_{i_0} \in U_{i_0} - V_{i_0}(x),$$

on avait, puisque (voir (8))

$$a_{i_0}^{-1} p_{i_0} \in V_{i_0}(x),$$

$$a_{i_0} a_{i_0}^{-1} p_{i_0} = p_{i_0} \in (U_{i_0} - V_{i_0}(x))\, V_{i_0}(x) \subset U_{i_0} V_{i_0}(x),$$

et alors avec (4)

$$U_{i_0} V_{i_0}(x) \subset U_{i_0}^2$$

donc

$$p_{i_0} \in U_{i_0}^2$$

[11]) Presque tous a le sens de : à un ensemble de mesure zéro près.

en contradiction avec (9). Donc, si P n'appartient pas à Q^2, a se trouve en au moins un $L_i(x)$.

Désignons par $M(x)$ l'ensemble de tous les points a de Q vérifiant (7) pour le point $x \in N$ qu'on s'est donné et pour choix convenable de $y \in Y$. Il suit de I et II que la mesure extérieure $\overline{m}(M(x))$ de $M(x)$ satisfait à

$$\overline{m}(M(x)) \leqq K(x)\, m(I^{-1}(x)) + \underset{1 \leqq 1 < \infty}{\text{fin sup}}\, m(L_i(x)).$$

On en tire en vertu de (5) et (6) que la série

$$\sum_{x \in N} \overline{m}(M(x))$$

converge. Il s'ensuit que les points a de Q, appartenant à un nombre infini d'ensembles $M(x)$, constituent un ensemble de mesure nulle; q.e.d.

Remarques.

1. La démonstration précédente est analogue à celle de M. KOKSMA, l.c. [1]).

2. Le théorème a le type du „cas de convergence" d'un théorème de Khintchine concernant les approximations diophantiques [12]).

3. Puisque Q contient l'élément neutre on a

$$Q \subset Q^2.$$

Ils existent des groupes topologiques dans lesquels on peut choisir le système de voisinages U_i tel que

$$Q = Q^2.$$

Par exemple le groups additif dans le corps des nombres P-adiques. Soit, dans ce cas, U l'ensemble des nombres P-adiques x satisfaisant à

$$|x|_P \leqq P^t. \qquad (t \text{ entier}).$$

Cet ensemble est Q. Si alors

$$|y|_P \leqq P^t,$$

il suit de l'inégalité triangulaire non-archimédienne

$$|x + y|_P \leqq P^t.$$

En vertu de la définition de Q^2 (ou U^2) (voir (2) et (3)) on en tire

$$Q^2 = Q.$$

Dans ce cas les suppositions se simplifient donc un peu. On pourrait appeler ces groupes topologiques non-archimédiens.

---

[12]) Voir: J. F. KOKSMA, Contribution à la théorie métrique des approximations diophantiques non-linéaires. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 176—183 (1942).

4. Les raisonnements dans la théorie des approximations diophantiques ont souvent comme sujet les nombres réels modulo 1. Cela veut dire qu'on réduit les nombres réels qu'on considère au moyen d'un certain ensemble — l'ensemble des nombres entiers — et par une certaine opération (addition, soustraction) à des nombres réels de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$; et cela tel qu'à chaque nombre réel correspond un seul nombre de cet intervalle. On pourrait appeler l'ensemble des entiers „l'ensemble réduçant" du problème considéré. Dans le théorème précédent on rencontre aussi un tel ensemble: c'est l'ensemble Y.

A l'aide des points de Y on réduit par une opération abstraite les points $F(x, y)$ à des points de Q^2 tel qu'à chaque $F(x, y)$, x étant donné, ne correspond qu'un nombre fini de points de Q^2. Cette dernière propriété, posée comme condition, n'éclaircit pas le caractère de l'ensemble Y. Il serait donc intéressant de savoir s'il est possible de donner des conditions générales à lesquelles un ensemble doit satisfaire pourqu'il peut figurer comme ensemble réduçant dans un problème diophantique.

5. Si l'espace E, dont N est un sous-ensemble dénombrable, est un espace métrique et normé on peut donner au théorème une forme qui ressemble mieux celle du théorème de M. KOKSMA. Supposons alors de plus que les points de N sont tous des points isolés et que, en désignant par $\| x \|$ la norme de x, $K(x)$ et $V(x)$ ne dépendent que de $\| x \|$, de sorte qu'on peut noter $K(\| x \|)$ et $V(\| x \|)$. Si alors $\lambda(\| x \|)$ désigne le nombre fini de points x de N à la norme $\| x \|$, les séries (5) et (6) se réduisent à la forme

$$\sum_{\| x \|=0}^{\infty} \lambda(\| x \|)\, K(\| x \|)\, m\,(I^{-1}(\| x \|)) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

$$\sum_{\| x \|=0}^{\infty} \lambda(\| x \|) \operatorname*{fin\,sup}_{1 \leqq i < \infty} m\,(L_i(\| x \|)). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (12)$$

6. En imposant des restrictions convenables à l'espace E on peut même faire tomber la supposition que l'ensemble N est dénombrable (ce n'est que dans la remarque 5 que nous avons supposé que N ne contient que des points isolés). Supposons, en effet, que sur E est définie une mesure $\mu(e)$; on peut alors définir dans E une notion d'intégrale. La condition de la convergence des séries (5) et (6) doit alors être remplacée par la condition que les intégrales

$$\int_N K(x)\, m\,(I^{-1}(x))\, d\mu(x)$$

$$\int_N \operatorname*{fin\,sup}_{1 \leqq i < \infty} m\,(L_i(x))\, d\mu(x)$$

existent et sont finies. On a alors:

A presque tous les points α de Q correspond au plus un ensemble de points $x \in N$ de mesure-μ zéro tel que pour chacun de ces points x il existe un $y \in Y$ rendant vrai (7).

§ 3. *Applications.* — 1. On voit immédiatement que le théorème précédent admet comme cas spécial le théorème de M. KOKSMA, mentionné au § 1, montré par lui pour les espaces euclidiens (l.c. 1) théorème 2).

En appliquant le théorème au groupe additif dans le corps des nombres réels on obtient la propriété suivante (l.c. 1) théorème 1):

Soit $f(x)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres réels. Si $\varphi(x)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ désigne une suite de nombres positifs telle que la série

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x)$$

converge, alors le système

$$-\varphi(x) \leqq f(x) - \alpha \leqq \varphi(x) \qquad (\mathrm{mod}\ 1)$$

admet pour presque tous les nombres réels α au plus un nombre fini de solutions en entiers $x > 0$.

2. On peut de même appliquer le théorème au groupe multiplicatif dans le corps des nombres réels. Soit, dans ce cas, Q l'intervalle

$$\frac{1}{a} \leqq \alpha \leqq a,$$

où $a > 1$ est une constante donnée. Q^2 est l'intervalle

$$\frac{1}{a^2} \leqq \alpha \leqq a^2.$$

Soient N la suite 1, 2, ... et Y l'ensemble des nombres a^t (t entier rationnel). $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions définies pour $x \in N$ tandis que

$$\left.\begin{aligned} 1 < \varphi(x) \leqq a \\ \frac{1}{a} \leqq \psi(x) < 1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$I(x)$ est l'intervalle

$$\psi(x) \leqq \alpha \leqq \varphi(x).$$

$I^{-1}(x)$ est l'intervalle

$$\frac{1}{\varphi(x)} \leqq \alpha \leqq \frac{1}{\psi(x)}.$$

Soit

$$F(x, y) = \frac{f(x)}{y}. \qquad (x \in N, y \in Y).$$

Soit, pour $x \in N$ donné, $K(x)$ le nombre de points y de Y tels que $\frac{f(x)}{y}$ soit un point de Q^2. On voit que $K(x) = 2$. En désignant par (div a^t) la réduction des nombres réels à des nombres de Q au moyen d'une division par une puissance convenable de a, on obtient le théorème suivant:

Soit $f(x)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ *une suite de nombres réels. Si* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *vérifient* (13) *tandis que les séries*

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{x=1}^{\infty} (\varphi(x) - \psi(x)) \\ &\sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

convergent, alors le système

$$\psi(x) \leqq \frac{f(x)}{a} \leqq \varphi(x) \qquad (\operatorname{div} \mathbf{a}^t)$$

admet pour presque tous les nombres réels a *au plus un nombre fini de solutions en nombres entiers* $x > 0$.

Posons

$$\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Alors la condition (14) devient une condition simple, à savoir la convergence de la série

$$\sum_{x=1}^{\infty} \left(\varphi(x) - \frac{1}{\varphi(x)}\right).$$

Par exemple on peut satisfaire à cette condition si l'on pose

$$\varphi(x) = \frac{1 + \sqrt{4x^4 + 1}}{2x^2}$$

auquel cas

$$\varphi(x) - \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{x^2}.$$

3. Les nombres complexes e^{ia} constituent un groupe topologique multiplicatif compact C; le théorème peut donc être appliqué. Soit Q l'ensemble des nombres e^{ia} dont l'argument est compris entre a et $-a$; c'est donc l'arc du cercle-unité, contenant 0, limité par les points e^{ia} et e^{-ia} $(a > 0)$. Soient N la suite 1, 2, ... et Y l'ensemble des nombres e^{ina} (n entier). Soit $I(x)$ l'arc du cercle-unité limité par les valeurs de l'argument $0 < \varphi(x) < a$ et $0 > \psi(x) > -a$. Alors $I^{-1}(x)$ est l'arc limité par les valeurs $-\varphi(x)$ et $-\psi(x)$.

On obtient la propriété suivante:

Soit $f(x)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ *une suite de nombres de la forme* $e^{i\theta}$. *Si la série*

$$\sum_{x=1}^{\infty} (\varphi(x) - \psi(x))$$

converge, alors le système

$$\psi(x) \leqq \arg e^{-i\alpha} f(x) \leqq \varphi(x) \qquad (\operatorname{div} e^{ina})$$

admet pour presque tous les a *réels au plus un nombre fini de solutions en nombres entiers* $x > 0$.

Il est clair, que cette application ne diffère pas d'une façon essentielle de celle du no. 1. Nous l'avons mentionnée à cause de sa relation avec l'application suivante.

4. Soit R le groupe additif dans le corps des nombres réels et soit M le sous-groupe des nombres entiers. Considérons le groupe quotient $G = R/M$, dont les éléments sont les classes d'équivalence modulo M. Ce groupe G devient un groupe topologique si on introduit la topologie suivante. Soit θ l'élément neutre de G, donc la classe qui a le nombre 0 comme représentant. Soit U un voisinage de 0 dans R. Alors par définition l'ensemble $U^* = M + x$ [13]), où x parcourt le voisinage U, est un voisinage de θ. Si U parcourt un système complet de voisinages de 0, le système des U^* est un système complet de voisinages de θ. A cause de l'additivité, un système de voisinages est alors fixé pour chaque élément A de G (comparer § 1). Appelons I^* un intervalle autour de θ, si U est un intervalle I autour de 0 dans R. Un intervalle I^* est déterminé par la donnée de deux représentants a et $-a$ $(0 < a \leqq 1)$ dans R.

Soit Q l'intervalle ainsi déterminé par $a = 1$. Les intervalles $V(x)$, sont déterminés par les représentants $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, dont sera supposé $0 < \varphi(x) < 1$, $-1 < \psi(x) < 0$. Il reste de déterminer la mesure sur G. Remarquons pour cela, comme on voit aisément, que le groupe topologique G est homéomorphe à un cercle C. On peut donc introduire comme mesure dans G la mesure ordinaire des ensembles correspondants sur C. Par cela, ce cas est ramené à l'application 3. C'est seulement la terminologie qui est devenue plus abstraite. On obtient la propriété suivante, qui a perdue le caractère d'inégalité:

Soit $f(x)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ une suite d'éléments de G (classes modulo M). Si la série

$$\sum_{x=1}^{\infty} (\varphi(x) - \psi(x))$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ fixent le voisinage $V(x)$ de θ, converge, alors la relation

$$A - f(x) - M \in V(x)$$

admet pour presque tous les éléments A de G au plus un nombre fini de solutions en nombres entiers $x > 0$.

Soulignons encore une fois que ce théorème ne diffère pas essentiellement des applications 1 et 3. Il fait seulement voir que le théorème principal offre des possibilités d'applications en des cas abstraits.

5. Soit R_2 le plan euclidien. Les points de R_2, ou autrement dit les vecteurs de R_2, constituent un groupe additif topologique G_2. Soit M_2 l'ensemble des points de G_2 dont les coordonnées sont des nombres entiers; M_2 est un sous-groupe de G_2. On peut appliquer, de façon analogue

---

[13]) Pour un x donné on désigne par $M + x$ l'ensemble des nombres $y + x$ si y parcourt M.

comme au no. 4, le théorème au groupe quotient $G = G_2/M_2$, qui est un groupe topologique. On voit que G est homómorph à un tore T_2 à deux dimensions. On obtient donc une propriété concernant les points de T_2 (comparer la relation entre les applications 3 et 4; l'application 3 traite le cas d'un tore à une dimension). Il n'y a pas de difficultés essentielles dans ceci.

D'une façon analogue on peut obtenir une propriété concernant les points d'un tore à n dimensions.

6. Considérons encore le cas du groupe additif dans le corps des nombres réels. On a la propriété suivante [14]:

Soient $\Lambda(x) \neq 0$, $\varphi(x) > 0$ et $f(x)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ des suites de nombres réels. Si les séries

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x), \qquad \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{|\Lambda(x)|}$$

convergent, alors l'inégalité

$$|\alpha \Lambda(x) - y - f(x)| \leqq \varphi(x)$$

admet pour presque tous les nombres réels α au plus un nombre fini de solutions x, y en nombres entiers $x > 0$ et y.

Pour la démonstration écrivons l'inégalité dans la forme

$$\left| \alpha - \frac{y + f(x)}{\Lambda(x)} \right| \leqq \frac{\varphi(x)}{|\Lambda(x)|}$$

et posons

$$F(x, y) = \frac{y + f(x)}{\Lambda(x)}.$$

Soient N la suite $1, 2, \ldots$ et Y la suite des nombres entiers; soit $I(x)$ l'intervalle $-\varphi(x) < \alpha < \varphi(x)$. Pour un x donné, $K(x)$ est le nombre des y tels que

$$0 \leqq \frac{y + f(x)}{\Lambda(x)} \leqq 1.$$

Donc

$$K(x) \leqq [|\Lambda(x)|] + 1,$$

si pour u réel on désigne par $[u]$ le plus grand nombre entier $\leqq u$. La démonstration est alors immédiate.

7. Par application analogue au groupe multiplicatif dans le corps des nombres réels on trouve:

---

[14]) Pour $\Lambda(x) = x$, $f(x) = 0$ cette propriété donne le "cas de convergence" du théorème de KHINTCHINE, mentionné ci-dessus (remarque 2 du § 2). Pour $f(x) = C^{te}$ la propriété a été donnée par M. KOKSMA; Metrisches über die Approximation reeller Zahlen. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **41**, 45—47 (1938).

Soient $\Delta(x) \neq 0$, $\varphi(x) > 0$ *et* $f(x)$ $(x = 1, 2, \dots)$ *des suites de nombres réels. Soit donné un nombre réel* $a > 1$; $\varphi(x) \leqq a$. *Si les séries*

$$\sum_{x=1}^{\infty} \left\{ (\varphi(x))^{\frac{1}{\Delta(x)}} - \left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta(x)}} \right\},$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} |\Delta(x)| \left\{ (\varphi(x))^{\frac{1}{\Delta(x)}} - \left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta(x)}} \right\}$$

convergent, alors le système

$$\frac{1}{\varphi(x)} \leqq \frac{f(x)}{a^{\Delta(x)}} \leqq \varphi(x) \qquad (\text{div } a^t)$$

admet pour presque tous les nombres réels a *au plus un nombre fini de solutions en nombres entiers* $x > 0$.

8. Appliquons le théorème, dans la forme lui donné dans la remarque 5 du § 2, au groupe additif G dans le corps des nombres P-adiques. Ce corps est localement compact, de sorte que l'application est permise. Soit N un ensemble dénombrable de nombres P-adiques x et supposons que $\lambda(|x|_P)$ de ces nombres possèdent la norme $|x|_P$; λ est supposé fini. Soit Q l'intervalle

$$|a|_P \leqq 1.$$

Supposons que Y est l'ensemble des nombres P-adiques de la forme

$$a_{-i} P^{-i} + \dots + a_{-1} P^{-1}$$

$$-\infty < i \leqq -1; \quad a_j = 0, 1, \dots, P-1.$$

Posons

$$F(x, y) = f(x) - y.$$

On a $K(|x|) = 1$. Les voisinages $V(x)$ sont déterminés par les relations

$$|a|_P \leqq P^{\varphi(|x|_P)} \qquad \dots\dots\dots \qquad (15)$$

où, à cause de (4), il faut avoir $\varphi(|x|_P) \leqq 0$. L'intervalle $I(x)$ est symétrique. Par TURKSTRA [15]) a été défini une mesure dans le corps des nombres P-adiques. La mesure de l'intervalle (15) vaut en particulier

$$P^{\varphi(|x|_P)}.$$

Les séries (11) et (12) sont identiques dans ce cas et on obtient la propriété suivante:

---

[15]) H. TURKSTRA. Metrische bijdragen tot de theorie der diophantische approximaties in het lichaam der P-adische getallen. Diss. V.U. Amsterdam (1936). Voir aussi: A. F. MONNA, Zur Theorie des Maszes im Körper der P-adischen Zahlen. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 978—980 (1942).

Soit $f(x)$ $(x \in N)$ une suite de nombres P-adiques. Si la série

$$\sum_{|x|_P=0}^{\infty} \lambda(|x|_P)\, P^{\varphi(|x|_P)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

converge, alors l'inégalité

$$|f(x)-a|_P \leqq P^{\varphi(|x|_P)} \pmod{Y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

admet pour presque tous les nombres P-adiques a au plus un nombre fini de solutions x en N.

L'extension de cette propriété à l'espace, dont les points sont les suites de n nombres P-adiques, que j'ai déjà considéré à une autre occasion [16]), ne rencontre pas de difficultés.

Remarquons que, dans cette forme, on ne peut pas prendre pour N la suite des nombres entiers > 0, puisque cette suite contient, à cause de la valuation P-adique, une infinité de nombres avec une valeur P-adique donnée. Si l'on veut, malgré cela, prendre pour N la suite $1, 2, \ldots$, il ne faut pas prendre pour φ une fonction qui ne dépend que de la norme, mais ce doit être une fonction qui dépend de x lui-même. Au lieu de (16) vient la série

$$\sum_{x=1}^{\infty} P^{\varphi(x)},$$

et au lieu de (17)

$$|f(x)-a|_P \leqq P^{\varphi(x)} \pmod{Y}.$$

On voit de cette remarque que le caractère de l'espace E, que nous avons introduit dans la remarque 5 du § 2, est un élément qui n'est pas d'une importance essentielle pour le théorème. Cet élément devient essentiel dès que l'on cherche des solutions dans un espace donné à l'avance. Par exemple dans les applications 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 il n'est pas essentiel que N est la suite $1, 2, \ldots$: on y peut prendre pour N un ensemble dénombrable arbitraire.

§ 4. *Deuxième forme du théorème principal.* — Considérons, comme introduction, encore une fois le groupe additif dans le corps des nombres réels. Nous avons trouvé des théorèmes concernant les nombres réels modulo n (n entier). L'application à tous les nombres réels de l'opération utilisée — addition ou soustraction — donne, pour n fixé, une transformation (translation) de R en lui-même. Dans les considérations modulo n on a donc donné une infinité dénombrable de transformations de R en lui-même (un groupe de transformations). Après cette remarque on vient à la forme suivante du théorème principal.

On introduit les notions G, Q, $V(x)$, N(dénombrable) et $K(x)$ comme

---

[16]) Zur Geometrie der P-adischen Zahlen. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **45**, 981—986 (1942). Quant à l'application 8 voir aussi: D. J. LOCK. Metrisch-diophantische onderzoekingen in $K(P)$ en $K^n(P)$. Diss. V.U. Amsterdam (1947).

ci-dessus. Cependant on n'introduit pas $F(x, y)$ et Y. Ces notions sont remplacée par ce qui suit. Soit donné un ensemble A d'opérateurs T; chaque opérateur T donne une transformation de G sur un sous-ensemble (propre ou non) de G. Soit $f(x)$ $(x \in N)$ une suite de points de G. Supposons alors que, pour chaque $x \in N$, ils existent au plus $K(x)$ opérateurs T de A tels que $Tf(x)$ soit un point de Q^2. C'est la seule condition que nous imposons à les transformations T. La démonstration du théorème suivant se fait alors exactement comme au § 2.

Pour presque tous les points a de Q ils existent au plus un nombre fini de points $x \in N$ pour lesquels il existe un opérateur $T \in A$ tel que

$$a^{-1}\, T f(x) \in V(x).$$

Cette forme du théorème principal fait bien ressortir le caractère: il s'agit de transformations et l'ensemble Y est un élément non-essentiel.

Application. Considérons le groupe additif R dans le corps des nombres rèels. Soit $\{a_n\}$ une suite croissante de nombres réels, tendant vers l'infini. L'ensemble A se compose des transformations T_i $(i = 1, 2, \ldots)$

$$T_i\, x = e^{a_i - x},$$

dont chacune transforme R en l'ensemble des nombres réels positifs. Pour $x > a_i$ on a $0 < T_i x < 1$.

Soit alors $f(x)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres réels. Un x étant doné, $T_i f(x)$ se trouve dans l'intervalle $(0, 1)$, seulement pour un nombre fini de valeurs de i; c'est une conséquence immédiate de la définition de la suite $\{a_n\}$. Par cela $K(x)$ est donc défini. Si par exemple $a_i = i$ on a $K(x) = [f(x)]$.

On obtient la propriété suivante:

Si les séries

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \quad . \quad \sum_{x=1}^{\infty} K(x)\, \varphi(x)$$

convergent, alors pour presque tous les nombres $0 \leqq a \leqq 1$ ils existent au plus un nombre fini d'entiers $x > 0$ pour lesquels il existe un i tel que

$$-\varphi(x) \leqq e^{a_i - f(x)} - a \leqq \varphi(x).$$