Mathematics. — *Uitbreiding van enige identiteiten.* I. By J. G. RUTGERS. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN.)

(Communicated at the meeting of May 29, 1948.)

In de verslagen der Ned. Akad. van Wetensch., Afd. Natuurkunde, Vol. LII, N^0. 4, 1943, gaf ik „Eenige identiteiten", die volgden uit formules, voorkomende in mijn artikel, geplaatst in de Proceedings, vol. XLV nos. 9 en 10, 1942, getiteld „Extension d'une série des fonctions de BESSEL, due à LOMMEL, et quelques séries des fonctions de BESSEL analogues", in het volgende aangeduid met I.

Deze identiteiten betroffen andere uitdrukkingen voor

$$\sum_{p=0}^{s} \frac{(\pm 1)^p (2s-2p+\nu)^k}{p!\,\Gamma(2s-p+\nu+1)} = (\pm 1)^s \sum_{p=0}^{s} \frac{(\pm 1)^p (2p+\nu)^k}{(s-p)!\,\Gamma(s+p+\nu+1)} \quad (k \text{ geheel} > 0)$$

in de volgende gevallen:

$(-1)^p$, $\nu=1$, k oneven; $(-1)^p$, $\nu=2$, k even; $(+1)^p$, ν willekeurig (in het bijzonder $\nu=1$ en $\nu=2$), k oneven; $(+1)^p$, $\nu=1$ en $\nu=2$, k even.

Het is echter ook mogelijk andere uitdrukkingen daarvoor aan te geven in de algemene gevallen:

$(+1)^p$, ν willekeurig, k even; $(-1)^p$, ν willekeurig, k oneven en k even.

1. Om daartoe te komen gaan we allereerst uit van de recurrente betrekkingen (25) en (25′) van I, n.l.

$$S_{\nu,2k+2}(x) = \nu^{2k+1}\frac{x}{2} I_{\nu-1}(x) - xS_{\nu+1,0}(x) - x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+1} S_{\nu+1,2p_1+2}(x). \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+2}(x) = (\nu-2)^{2k+1}\frac{x}{2} I_{\nu-1}(x) + xS_{\nu-1,0}(x) + \\ + x\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2} S_{\nu-1,2p_1+2}(x), \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

waarin $I_\mu(x)$ de BESSEL'sche functie voorstelt en $S_{\nu,k}(x) =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu+2n)^k I_{\nu+2n}(x)$ is.

Vervangen we in (1) $S_{\nu+1,2p_1+2}(x)$ door de uitdrukking, die uit (1) volgt door daarin ν en k te vervangen door $\nu+1$ resp p_1 (en gelijktijdig p_1 door p_2), waardoor $S_{\nu,2k+2}(x)$ wordt uitgedrukt in $S_{\nu+2,2p_2+2}(x)$, en substitueren we hiervoor weer de uitdrukking, die uit (1) volgt na vervanging van ν door $\nu+2$, k door p_2 (en gelijktijdig p_1 door p_3), dan vinden we, zo voortgaande, ten slotte de algemene formule (ν willekeurig):

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+2}(x) = \frac{x}{2}\sum_{r=0}^{k}(-x)^r\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k+1}{2p_1+2r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2r-1}{2p_2+2r-2}\cdots \\ \cdots\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+3}{2p_r+2}\{(\nu+r)^{2p_r+1}I_{\nu+r-1}(x)-2S_{\nu+r+1,0}(x)\}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Op overeenkomstige wijze volgt uit (2):

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu,2k+2}(x) = \frac{x}{2}\sum_{r=0}^{k}x^r\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k+1}{2p_1+2r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2r-1}{2p_2+2r-2}\cdots \\ \cdots\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+3}{2p_r+2}\{(\nu-r-2)^{2p_r+1}I_{\nu-r-1}(x)+2S_{\nu-r-1,0}(x)\}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Hierin is, zo $r=0$ is, voor

$$\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+3}{2p_r+2}(\nu+r)^{2p_r+1} \text{ resp. } (\nu-r-2)^{2p_r+1}$$

te nemen ν^{2k+1} resp. $(\nu-2)^{2k+1}$. De afleiding dezer formules werd in I achterwege gelaten, omdat hierdoor $S_{\nu,2k+2}(x)$, ν willekeurig, wordt uitgedrukt in oneindige reeksen $S_{\mu,0}(x)$, die slechts door een eindige vorm zijn voor te stellen, en dus ook $S_{\nu,2k+2}(x)$, indien μ geheel is, hetgeen in I als doel werd gesteld.

Met het oog op de algemene identiteiten, waarom het nu gaat, zijn deze formules wel van belang.

Door nl. in (1) en (2) te substitueren:

$$S_{\nu,2k+2}(x) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}\sum_{p=0}^{s}\frac{(2p+\nu)^{2k+2}}{(s-p)!\,\Gamma(s+p+\nu+1)},$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{r+1}\{(\nu+r)^{2p_r+1}I_{\nu+r-1}(x)-2S_{\nu+r-1,0}(x)\} =$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2r+\nu}}{m!\,\Gamma(m+r+\nu)}(\nu+r)^{2p_r+1}-2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2r+\nu+2}\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{(m-p)!\,\Gamma(m+p+r+\nu+2)}=$$

$$=(-1)^r\sum_{s=r}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}}{(s-r)!\,\Gamma(s+\nu)}(\nu+r)^{2p_r+1}+(-1)^r\,2\sum_{s=r+1}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}\sum_{p=0}^{s-r-1}\frac{1}{(s-r-p-1)!\,\Gamma(s+p+\nu+1)},$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{r+1}\{(\nu-r-2)^{2p_r+1}I_{\nu-r-1}(x)+2\,S_{\nu-r-1,0}(x)\} =$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}}{s!\,\Gamma(s-r+\nu)}(\nu-r-2)^{2p_r+1}+2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}\sum_{p=0}^{s}\frac{1}{(s-p)!\,\Gamma(s-r+p+\nu)}$$

en daarna aan elkaar gelijk te stellen de coëfficienten van $\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}$ in beide leden, worden we gevoerd tot de algemene identiteiten (ν willekeurig):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{s}\frac{(2p+\nu)^{2k+2}}{(s-p)!\,\Gamma(s+p+\nu+1)}=\\
&=\sum_{r=0}^{k}2^r\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k+1}{2p_1+2r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2r-1}{2p_2+2r-2}\cdots\\
&\cdots\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+3}{2p_r+2}\left\{\frac{(\nu+r)^{2p_r+1}}{(s-r)!\,\Gamma(s+\nu)}+2\sum_{p=0}^{s-r-1}\frac{1}{(s-r-p-1\,!\,\Gamma(s+p+\nu+1)}\right\}=\\
&=\sum_{r=0}^{k}2^r\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k+1}{2p_1+2r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2r-1}{2p_2+2r-2}\cdots\\
&\qquad\cdots\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+3}{2p_r+2}\left\{\frac{(\nu-r-2)^{2p_r+1}}{s!\,\Gamma(s-r+\nu)}+2\sum_{p=0}^{s}\frac{1}{(s-p)!\,\Gamma(s-r+p+\nu)}\right\}
\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Hierin is, zo $r=0$ is, voor $\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+3}{2p_r+2}(\nu+r)^{2p_r+1}$ resp. $(\nu-r-2)^{2p_r+1}$ te nemen ν^{9k+1} resp. $(\nu-2)^{2k+1}$.

Door in (1) voor $S_{\nu+1,2p_1+2}(x)$ te substitueren de uitdrukking, die uit (2) volgt door vervanging van ν en k door $\nu+1$ resp. p_1 (en gelijktijdig p_1 door p_2), evenzo in (2) voor $S_{\nu-1,p_1+2}(x)$ te substitueren de uitdrukking, die uit (1) volgt door vervanging van ν en k door $\nu-1$ resp. p_1 (en gelijktijdig p_1 door p_2), worden verkregen de recurrente betrekkingen, reeds in I onder (26) en (26′) vermeld:

$$\begin{aligned}
S_{\nu,2k+2}(x)&=\nu^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)-xS_{\nu+1,0}(x)-\\
&-\frac{x^2}{2}I_\nu(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2}(\nu-1)^{2p_1+1}-x^2S_{\nu,0}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2}-\\
&\qquad-x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k+1}{2p_1+4}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+3}{2p_2+2}S_{\nu,2p_2+2}(x)
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
S_{\nu,2k+2}(x)&=(\nu-2)^{2k+1}\frac{x}{2}I_{\nu-1}(x)+xS_{\nu-1,0}(x)+\\
&+\frac{x^2}{2}I_{\nu-2}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2}(\nu-1)^{2p_1+1}-x^2S_{\nu,0}(x)\sum_{p_1=0}^{k-1}\binom{2k+1}{2p_1+2}-\\
&\qquad-x^2\sum_{p_1=0}^{k-2}\binom{2k+1}{2p_1+4}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+3}{2p_2+2}I_{\nu,2p_2+2}(x).
\end{aligned}$$

Deze voeren ieder afzonderlijk, op gelijke wijze als in het vorige geval, tot algemene formules (ν willekeurig), waardoor $S_{\nu,2k+2}(x)$ wordt uitgedrukt in $S_{\nu+1,0}(x)$ en $S_{\nu,0}(x)$ resp. $S_{\nu-1,0}(x)$ en $S_{\nu,0}(x)$, hetgeen in I weer achterwege werd gelaten. We vinden dan:

$$\left.\begin{aligned}
S_{\nu,2k+2}(x) = {} & \frac{x}{2}\sum_{r=0}^{\leq\frac{k}{2}}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{k-2r}\binom{2k+1}{2p_1+4r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-1}{2p_2+4r-2}\cdots \\
& \cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+3}{2p_{2r}+2}\{\nu^{2p_{2r}+1}I_{\nu-1}(x)-2S_{\nu+1,0}(x)\} - \\
& -2\left(\frac{x}{2}\right)^2\sum_{r=0}^{\leq\frac{k-1}{2}}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{k-2r-1}\binom{2k+1}{2p_1+4r+2}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r+1}{2p_2+4r}\cdots \\
& \cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+3}{2p_{2r+1}+2}\{(\nu-1)^{2p_{2r+1}+1}I_\nu(x)+2S_{\nu,0}(x)\} = \\
= {} & \frac{x}{2}\sum_{r=0}^{\leq\frac{k}{2}}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{k-2r}\binom{2k+1}{2p_1+4r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-1}{2p_2+4r-2}\cdots \\
& \cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+3}{2p_{2r}+2}\{(\nu-2)^{2p_{2r}+1}I_{\nu-1}(x)+2S_{\nu-1,0}(x)\} + \\
& +2\left(\frac{x}{2}\right)^2\sum_{r=0}^{\leq\frac{k-1}{2}}(-x^2)^r\sum_{p_1=0}^{k-2r-1}\binom{2k+1}{2p_1+4r+2}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r+1}{2p_2+4r}\cdots \\
& \cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+3}{2p_{2r+1}+2}\{(\nu-1)^{2p_{2r+1}+1}I_{\nu-2}(x)-2S_{\nu,0}(x)\}.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Hierin is, zo $r=0$ is, voor

$$\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+3}{2p_{2r}+2}\nu^{2p_{2r}+1} \text{ resp. } (\nu-2)^{2p_{2r}+1}$$

te nemen ν^{2k+1} res. $(\nu-2)^{2k+1}$.

Door in (6) te substitueren:

$$S_{\nu,2k+2}(x) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}\sum_{p=0}^{s}\frac{(2p+\nu)^{2k+2}}{(s-p)!\,\Gamma(s+p+\nu+1)},$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}\{\nu^{2p_{2r}+1}I_{\nu-1}(x)-2S_{\nu+1,0}(x)\} =$$

$$=(-1)^r\sum_{s=r}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}}{(s-r)!\,\Gamma(s-r+\nu)}\nu^{2p_{2r+1}+1} +$$

$$+(-1)^r\,2\sum_{s=r+1}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}\sum_{p=0}^{s-r-1}\frac{1}{(s-r-p-1)!\,\Gamma(s-r+p+\nu+1)},$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+2}\{(\nu-1)^{2p_{2r+1}+1} I_\nu(x) + 2S_{\nu,0}(x)\} =$$

$$= (-1)^{r+1}\sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}}{(s-r-1)!\,\Gamma(s-r+\nu)}(\nu-1)^{2p_{2r+1}+1} +$$

$$+ (-1)^{r+1}\, 2 \sum_{s=r+1}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}\sum_{p=0}^{s-r-1}\frac{1}{(s-r-p-1)!\,\Gamma(s-r+p+\nu)},$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}\{\nu-2)^{2p_{2r}+1} I_{\nu-1}(x) + 2S_{\nu-1,0}(x)\} =$$

$$= (-1)^r \sum_{s=r}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}}{(s-r)!\,\Gamma(s-r+\nu)}(\nu-2)^{2p_{2r}+1} +$$

$$+ (-1)^r\, 2\sum_{s=r}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}\sum_{p=0}^{s-r}\frac{1}{(s-r-p)!\,\Gamma(s-r+p+\nu)},$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+2}\{(\nu-1)^{2p_{2r+1}+1} I_{\nu-2}(x) - 2S_{\nu,0}(x)\} =$$

$$= (-1)^r\sum_{s=r}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}}{(s-r)!\,\Gamma(s-r+\nu+1)}(\nu-1)^{2p_{2r+1}+1} -$$

$$-(-1)^r\, 2\sum_{s=r+1}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}\sum_{p=0}^{s-r-1}\frac{1}{(s-r-p-1)!\,\Gamma(s-r+p+\nu)},$$

en daarna aan elkaar gelijk te stellen de coefficienten van $\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}$ in beide leden, worden we gevoerd tot de algemene identiteiten (ν willekeurig):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{s} \frac{(2p+\nu)^{2k+2}}{(s-p)!\,\Gamma(s+p+\nu+1)} = \\
&= \sum_{r=0}^{\leq \frac{k}{2}} 2^{2r}\sum_{p_1=0}^{k-2r}\binom{2k+1}{2p_1+4r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r-1}{2p_2+4r-2}\cdots \\
&\cdots\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}}\binom{2p_{2r-1}+3}{2p_{2r}+2}\left\{\frac{\nu^{2p_{2r}+1}}{(s-r)!\,\Gamma(s-r+\nu)} + 2\sum_{p=0}^{s-r-1}\frac{1}{(s-r-p-1)!\,\Gamma(s-r+p+\nu+1)}\right\}+ \\
&+2\sum_{r=0}^{\leq \frac{k-1}{2}} 2^{2r}\sum_{p_1=0}^{k-2r-1}\binom{2k+1}{2p_1+4r+2}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r+1}{2p_2+4r}\cdots \\
&\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+3}{2p_{2r+1}+2}\left\{\frac{(\nu-1)^{2p_{2r+1}+1}}{(s-r-1)!\,\Gamma(s-r+\nu)}+2\sum_{p=0}^{s-r-1}\frac{1}{(s-r-p-1)!\,\Gamma(s-r+p+\nu)}\right\} =
\end{aligned}\right\} . \quad (7)$$

(Zie volgende pagina)

$$= \sum_{r=0}^{\le \frac{k}{2}} 2^{2r} \sum_{p_1=0}^{k-2r} \binom{2k+1}{2p_1+4r} \sum_{p_2=0}^{p_1} \binom{2p_1+4r-1}{2p_2+4r-2} \cdots$$

$$\cdots \sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}} \binom{2p_{2r-1}+3}{2p_{2r}+2} \left\{ \frac{(\nu-2)^{2p_{2r}+1}}{(s-r)!\,\Gamma(s-r+\nu)} + 2\sum_{p=0}^{s-r} \frac{1}{(s-r+p)!\,\Gamma(s-r+p+\nu)} \right\} +$$

$$+2\sum_{r=0}^{\le\frac{k-1}{2}} 2^{2r} \sum_{p_1=0}^{k-2r-1}\binom{2k+1}{2p_1+4r+2}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+4r+1}{2p_2+4r}\cdots$$

$$\cdots\sum_{p_{2r+1}=0}^{p_{2r}}\binom{2p_{2r}+3}{2p_{2r+1}+2}\left\{\frac{(\nu-1)^{2p_{2r+1}+1}}{(s-r)!\,\Gamma(s-r+\nu-1)} + 2\sum_{p=0}^{s-r-1}\frac{1}{(s-r-p-1)!\,\Gamma(s-r+p+\nu)}\right\} \quad . (7)$$

Hierin is, zo $r=0$ is, voor $\sum_{p_{2r}=0}^{p_{2r-1}} \binom{2p_{2r-1}+3}{2p_{2r}+2} \nu^{2p_{2r}+1}$ resp. $(\nu-2)^{2p_{2r}+1}$ te nemen ν^{2k+1} resp. $(\nu-2)^{2k+1}$.

Uit (5) en (7) volgt voor $k=0$, ν willekeurig:

$$\sum_{p=0}^{s} \frac{(2p+\nu)^2}{(s-p)!\,\Gamma(s+p+\nu+1)} = \frac{\nu}{s!\,\Gamma(s+\nu)} + 2\sum_{p=0}^{s-1}\frac{1}{(s-p-1)!\,\Gamma(s+p+\nu+1)}. \quad (8)$$

In verband met de indentiteiten:

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(n-p)!\,(n+p)!} = \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} + \frac{1}{2(n!)^2},\quad \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(n-p)!\,(n+p+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!},$$

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(n-p)!\,(n+p+2)!} = \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!} - \frac{1}{2\{(n+1)!\}^2},$$

welke o.a. af te leiden zijn uit:

$$S_{0,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x) = \tfrac{1}{2}\{I_0(x)+\cos x\},\ S_{1,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(x) = \tfrac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{2,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+2}(x) = \tfrac{1}{2}\{I_0(x)-\cos x\}$$

volgt uit (7) voor $\nu=1$:

$$\sum_{p=0}^{s}\frac{(2p+1)^{2k+2}}{(s-p)!\,(s+p+1)!} =$$

$$= 2^{2s}\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{(2s-r)!}\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k+1}{2p_1+2r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2r-1}{2p_2+2r-2}\cdots\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+3}{2p_r+2},$$

evenzo uit de tweede van (7) voor $\nu=2$:

$$\sum_{p=0}^{s}\frac{(2p+2)^{2k+2}}{(s-p)!\,(s+p+2)!} =$$

$$= 2^{2s+1}\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{(2s-r+1)!}\sum_{p_1=0}^{k-r}\binom{2k+1}{2p_1+2r}\sum_{p_2=0}^{p_1}\binom{2p_1+2r-1}{2p_2+2r-1}\cdots\sum_{p_r=0}^{p_{r-1}}\binom{2p_{r-1}+3}{2p_r+2},$$

welke bijzondere gevallen voorkomen als (9) en (10) in het aangehaalde artikel „Eenige identiteiten".