Mathematics. — *Über mehrwertige Aussagenkalküle und mehrwertige engere Prädikatenkalküle.* III. By J. RIDDER. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of September 25, 1948.)

Der Aussagenkalkül *KL*.

§ 16. Nach GÖDEL [1]) lässt sich das durch das BECKERsche Zusatzaxiom $\mathbf{N}p \rightarrow \mathbf{NN}p$ und die hier folgenden Axiome V und VI ergänzte LEWISsche System of Strict Implication durch folgendes Axiomensystem charakterisieren.

Einsetzungsregel E (erster Teil). Aus einer *Kalkülformel* erhält man wieder eine Kalkülformel, wenn man einen in ihr auftretenden grossen lateinischen Buchstaben durch eine Kalkülformel ersetzt (gleichgestaltete Buchstaben durch gleichgestaltete Formeln); dabei sind die grossen lateinischen Buchstaben, λ und ν als Kalkülformeln anzusehen, ferner mit $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}$ auch $\mathfrak{N} + \mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{S}'$ und $\mathbf{N}\mathfrak{N}$, $\mathbf{N}\mathfrak{S}$.

Definition 1. $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}$.

$\doteq \bar{\nu}$, $\doteq \bar{\lambda}$ sind *Modalitätszeichen.*

Definition 2. Ein Ausdruck, bestehend aus einer Kalkülformel gefolgt durch $\doteq \bar{\nu}$, oder $\doteq \bar{\lambda}$, und entstanden nach endlichmaliger Anwendung von Axiomen, Einsetzungsregel *E*, Schlussschema *S* oder (und) Ableitungsregel *A*, ist *ein Theorem.*

Einsetzungsregel E (zweiter Teil). Ist $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ ein Theorem, und $\mathfrak{B}$ eine aus $\mathfrak{A}$ mittels der Einsetzungsregel *E* (erster Teil) hervorgehende Kalkülformel, so liefert auch $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$ ein Theorem.

Axiom I. $[(X + X) \rightarrow X] \doteq \bar{\nu}$.

Axiom II. $[X \rightarrow (X + Y)] \doteq \bar{\nu}$.

Axiom III. $[(X + Y) \rightarrow (Y + X)] \doteq \bar{\nu}$.

Axiom IV. $[(Y \rightarrow Z) \rightarrow \{(X + Y) \rightarrow (X + Z)\}] \doteq \bar{\nu}$.

Schlussschema S. Sind

$$\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu} \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}] \doteq \bar{\nu}$$

Theoreme, so ist auch

$$\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$$

ein Theorem.

Definition 3. Eine andere Schreibweise eines Theorems $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ ist $\mathfrak{A}' \doteq \bar{\lambda}$; eine andere Schreibweise eines Theorems $\mathfrak{A}' \doteq \bar{\nu}$ ist $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}$.

---

1) Siehe Ergebnisse eines mathem. Kolloquiums herausgegeben von Karl Menger, Heft 4 (1933), Leipzig u. Berlin, S. 39. Die Axiome V und VI fehlen an der zitierten Stelle.

Definition 4. $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}')'$.
Definition 5. $\mathfrak{A} \rightarrow_2 \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}$.
Axiom V. $[\lambda \rightarrow X] \doteqdot \bar{\nu}$.
Axiom VI. $[X \rightarrow \nu] \doteqdot \bar{\nu}$.

Dualitätsprinzip D_1 [2]. Ist $\mathfrak{A} \doteqdot \bar{\nu}$ ein Theorem, so auch $\mathfrak{B} \doteqdot \bar{\lambda}$; dabei gehe Kalkülformel $\mathfrak{B}$ aus Kalkülformel $\mathfrak{A}$ dadurch hervor, dass: α) $+$ durch $\cdot$, und umgekehrt, β) λ durch ν, und umgekehrt, γ) $\rightarrow$ durch $\rightarrow_2$, und umgekehrt, ersetzt werden; ev. vorkommende Akzenten und **N** sollen ungeändert bleiben. Ist, umgekehrt, bei denselben Kalkülformeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B} \doteqdot \bar{\lambda}$ ein Theorem, so auch $\mathfrak{A} \doteqdot \bar{\nu}$.

Axiom VII. $[(\mathbf{N}X) \rightarrow X] \doteqdot \bar{\nu}$.
Axiom VIII. $[\{\mathbf{N}(X \rightarrow Y)\} \rightarrow \{(\mathbf{N}X) \rightarrow (\mathbf{N}Y)\}] \doteqdot \bar{\nu}$.
Axiom IX. $[(\mathbf{N}X) \rightarrow \{\mathbf{N}(\mathbf{N}X)\}] \doteqdot \bar{\nu}$.
Ableitungsregel A. Ist $\mathfrak{A} \doteqdot \bar{\nu}$ ein Theorem, so auch $(\mathbf{N}\mathfrak{A}) \doteqdot \bar{\nu}$.
Definition 6. $\mathbf{M}\mathfrak{A}$ ist eine andere Schreibweise von $[\mathbf{N}\mathfrak{A}']'$.

Satz 1 (Schlussschema). Ist $\mathfrak{A} \doteqdot \bar{\lambda}$ ein Theorem, so auch $(\mathbf{M}\mathfrak{A}) \doteqdot \bar{\lambda}$.

Beweis. Eine andere Schreibweise von $\mathfrak{A} \doteqdot \bar{\lambda}$ ist $\mathfrak{A}' \doteqdot \bar{\nu}$. Also ist, nach Ableitungsregel A, auch $[\mathbf{N}\mathfrak{A}'] \doteqdot \bar{\nu}$ ein Theorem oder, anders geschrieben, $[N\mathfrak{A}']' \doteqdot \bar{\lambda}$, d.h. $(\mathbf{M}\mathfrak{A}) \doteqdot \bar{\lambda}$.

Satz 2. $[(\mathbf{M}X) \rightarrow_2 X] \doteqdot \bar{\lambda}$ (ist ein Theorem).
Beweis. Axiom VII und Einsetzungsregel E liefern:

$$[(\mathbf{N}X') \rightarrow X'] \doteqdot \bar{\nu},$$

oder

$$[(\mathbf{N}X')' + X'] \doteqdot \bar{\nu},$$

oder

$$(\mathbf{M}X + X') \doteqdot \bar{\nu},$$

oder

$$[(\mathbf{M}X)' \cdot X] \doteqdot \bar{\lambda},$$

oder

$$[(\mathbf{M}X) \rightarrow_2 X] \doteqdot \bar{\lambda}.$$

Satz 3. $[\{\mathbf{M}(X \rightarrow_2 Y)\} \rightarrow_2 \{(\mathbf{M}X) \rightarrow_2 (\mathbf{M}Y)\}] \doteqdot \bar{\lambda}$.
Beweis. Axiom VIII und Einsetzungsregel E liefern:

$$[\{\mathbf{N}(X' \rightarrow Y')\} \rightarrow \{(\mathbf{N}X') \rightarrow (\mathbf{N}Y')\}] \doteqdot \bar{\nu},$$

oder

$$[\{\mathbf{N}(X + Y')\}' + \{(\mathbf{N}X')' + (\mathbf{N}Y')\}] \doteqdot \bar{\nu},$$

oder

$$[\{\mathbf{N}(X' \cdot Y)'\}' + \{(\mathbf{N}X')' + (\mathbf{N}Y')\}] \doteqdot \bar{\nu},$$

[2]) Siehe J. RIDDER, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **49**, 1153—1164 (1946), u. **50**, 24—30 (1947), insbes. S. 1153, 1154, 1156 u. S. 26, 27 (Satz 42).

oder

$$[\mathbf{M}(X' . Y) + \{(\mathbf{M}X) + (\mathbf{M}Y)'\}] \doteq \bar{\nu},$$

oder

$$[\{\mathbf{M}(X' \cdot Y)\}' \cdot \{(\mathbf{M}X)' \cdot (\mathbf{M}Y)\}] \doteq \bar{\lambda},$$

oder

$$[\{\mathbf{M}(X \rightarrow_2 Y)\} \rightarrow_2 \{(\mathbf{M}X) \rightarrow_2 (\mathbf{M}Y)\}] \doteq \bar{\lambda}.$$

Satz 4. $[(\mathbf{M}X) \rightarrow_2 \{\mathbf{M}(\mathbf{M}X)\}] \doteq \bar{\lambda}.$

Beweis. Axiom IX und Einsetzungsregel E liefern:

$$[(\mathbf{N}X') \rightarrow \{\mathbf{N}(\mathbf{N}X')\}] \doteq \bar{\nu},$$

oder

$$[(\mathbf{N}X')' + \{\mathbf{N}(\mathbf{N}X')\}] \doteq \bar{\nu},$$

oder

$$[(\mathbf{N}X') \cdot \{\mathbf{N}(\mathbf{N}X')\}'] \doteq \bar{\lambda},$$

oder

$$\{(\mathbf{N}X') \cdot [\mathbf{M}\{(\mathbf{N}X')'\}]\} \doteq \bar{\lambda},$$

oder

$$[(\mathbf{M}X)' \cdot \{\mathbf{M}(\mathbf{M}X)\}] \doteq \bar{\lambda},$$

oder

$$[(\mathbf{M}X) \rightarrow_2 \{\mathbf{M}(\mathbf{M}X)\}] \doteq \bar{\lambda}.$$

Aus den Axiomen VII, VIII, IX, Ableitungsregel A einerseits und den Sätzen 1—4 andererseits folgt, dass obiges Dualitätsprinzip sich erweitern lässt zu folgendem

Prinzip D$_2$. Ist $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ ein Theorem, so auch $\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}$; dabei gehe $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ dadurch hervor, dass: α) $+$ durch $\cdot$, und umgekehrt, β) λ durch ν, und umgekehrt, γ) $\rightarrow$ durch $\rightarrow_2$, und umgekehrt, δ) **N** durch **M**, und umgekehrt, ersetzt werden; ev. vorkommende Akzenten sollen ungeändert bleiben. Ist, umgekehrt, bei denselben Kalkülformeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}$ ein Theorem, so auch $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$.

§ 17. *Das Axiomensystem des Par. 16 ist widerspruchsfrei* in dem Sinne, dass $X \doteq \bar{\nu}$ und $X \doteq \bar{\lambda}$ nicht aus ihm ableitbar sind.

Beweis. Wir betrachten eine Menge M von n diskreten Elementen ($n \geqq 1$).

Den durch grosse lateinische Buchstaben angedeuteten elementaren Kalkülformeln sollen als „Werte" die Teilmengen von M zugeordnet werden können (die leere Menge 0 und die Menge M selbst mit einbegriffen).

$A + B$ $[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}]$ ordnen wir den „Wert" $T_1 + T_2$ zu, falls A $[\mathfrak{A}]$ die Teilmenge T_1, B $[\mathfrak{B}]$ die Teilmenge T_2 zugeordnet ist; $A \cdot B$ $[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}]$ sei dann $T_1 \cdot T_2$ als „Wert" zugeordnet. $A'[\mathfrak{A}']$ sei die Komplementärmenge $M—T_1$ als „Wert" zugeordnet, falls $A[\mathfrak{A}]$ T_1 zugeordnet ist.

Ist $A[\mathfrak{A}]$ M zugeordnet, so sei auch $\mathbf{N}A[\mathbf{N}\mathfrak{A}]$ die Menge M als „Wert" zugeordnet; ist $A[\mathfrak{A}]$ die leere Menge oder eine echte nicht leere Teilmenge von M als „Wert" zugeordnet, so sei der zugehörige „Wert" von $\mathbf{N}A[\mathbf{N}\mathfrak{A}]$ die leere Menge.

λ sei als einzig möglicher „Wert" die leere Menge 0, ν als einzig möglicher „Wert" die Menge M zugeordnet.

Welche „Werte" auch den Kalkülformeln X, Y, Z zugeordnet sind, in allen Fällen ist den in den Axiomen I—IX im Voerderglied vorkommenden Kalkülformeln die Menge M zugeordnet.

Ausserdem führen Einsetzungsregel E, Schlussschema S und Ableitungsregel A immer von Theoremen $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ mit der im letzten Absatz genannten Eigenschaft zu Theoremen $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$ mit derselben Eigenschaft. Schliesslich führt Anwendung von Definition 3 von Theoremen $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$, bei welchen $\mathfrak{A}$ nur den „Wert" M haben kann, zu Theoremen $\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}$, bei welchen $\mathfrak{B}$ nur den „Wert" 0 haben kann, und umgekehrt.

Damit ist die Nicht-Ableitbarkeit von $X \doteq \bar{\nu}$ und die von $X \doteq \bar{\lambda}$ bewiesen.

Das Beweisverfahren zeigt ausserdem, *dass der Kalkül KL ein 2^n-wertiger Kalkül ist* $(n \geqq 1)$.

§ 18. Das Axiomensystem des Par. 16 steht dual gegenüber folgendem System; die Systeme sind gleichwertig [3]).

Definition 2_0. Ein Ausdruck bestehend aus einer Kalkülformel, gefolgt durch $\doteq \bar{\nu}$ oder $\doteq \bar{\lambda}$, und entstanden nach endlichmaliger Anwendung von Axiomen (dieses Par.), Einsetzungsregel E_0, Schlussschema S_0 oder (und) Ableitungsregel A_0 ist *ein Theorem.*

Einsetzungsregel $\mathbf{E}_0$, aus Regel E hervorgehend durch Änderung von $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}$, und von $\mathbf{N}\mathfrak{R}$ in $\mathbf{M}\mathfrak{R}$, von $\mathbf{N}\mathfrak{S}$ in $\mathbf{M}\mathfrak{S}$, schliesslich von $\mathfrak{A} \doteq \bar{\nu}$ in $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}$, von $\mathfrak{B} \doteq \bar{\nu}$ in $\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}$.

Schlussschema $\mathbf{S}_0$. Sind

$$\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda} \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A} \rightarrow_2 \mathfrak{B}] \doteq \bar{\lambda}$$

Theoreme, so auch

$$\mathfrak{B} \doteq \bar{\lambda}.$$

Axiom $\mathbf{I}_0$. $[(X \cdot X) \rightarrow_2 X] \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom $\mathbf{II}_0$. $[X \rightarrow_2 (X \cdot Y)] \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom $\mathbf{III}_0$. $[(X \cdot Y) \rightarrow_2 (Y \cdot X)] \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom $\mathbf{IV}_0$. $[(Y \rightarrow_2 Z) \rightarrow_2 \{(X \cdot Y) \rightarrow_2 (X \cdot Z)\}] \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom $\mathbf{V}_0$. $[\nu \rightarrow_2 X] \doteq \bar{\lambda}$.

[3]) Vergl. § 16 und RIDDER, loc. cit. 2), S. 26 u. 27 (Par. 10).

Axiom VI$_0$. $[X \rightarrow_2 \lambda] \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom VII$_0$. $[(\mathbf{M}X) \rightarrow_2 X] \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom VIII$_0$. $[\{\mathbf{M}(X \rightarrow_2 Y)\} \rightarrow_2 \{(\mathbf{M}X) \rightarrow_2 (\mathbf{M}Y)\}] \doteq \bar{\lambda}$.

Axiom IX$_0$. $[(\mathbf{M}X) \rightarrow_2 \{\mathbf{M}(\mathbf{M}X)\}] \doteq \bar{\lambda}$.

Ableitungsregel A$_0$. Ist $\mathfrak{A} \doteq \bar{\lambda}$ ein Theorem, so auch $(\mathbf{M}\mathfrak{A}) \doteq \bar{\lambda}$.

Die Definitionen 1, 3 und 5 bleiben erhalten.

Definition 4$_0$. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist eine andere Schreibweise von $(\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}')'$.

Definition 6$_0$. $\mathbf{N}\mathfrak{A}$ ist eine andere Schreibweise von $[\mathbf{M}\mathfrak{A}']'$.

Die Aussagenkalküle $KL^{(p)}$ $(p \geqq 2)$.

§ 19. Die in dem erweiterten RUSSELL–WHITEHEADschen Aussagenkalkül K gültige Dualität [4]) ermöglichte in Teil I und Teil II [5]) die Einführung von Aussagenkalkülen $K^{(p)}$ $(p \geqq 2)$, welche als „Produkte" von p erweiterten RUSSELL–WHITEHEADschen Kalkülen K aufzufassen sind.

Ebenso ermöglicht die Dualität von §§ 16 und 18 die Einführung von Aussagenkalkülen $KL^{(p)}$ $(p \geqq 2)$, welche als „Produkte" von p erweiterten LEWISschen Kalkülen KL (§ 16) aufzufassen sind.

Die näheren Ausführungen dieses Gedankens liegen auf der Hand [6]).

---

4) Siehe RIDDER, loc. cit. 2), S. 26, 27 (Satz 42).

5) Siehe insbes. Teil I dieser Arbeit, §§ 8, 9 und Teil II, § 12.

6) Jeder Kalkül $KL^{(p)}$ enthält wieder eine von den Axiomen und den übrigen Schlussregeln unabhängige Verbindungsregel.