**Mathematics.** — *Opmerkingen over het beginsel van het uitgesloten derde en over negatieve asserties.* By L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of November 27, 1948.)

§ 1.

Onder een *aanstuiving* verstaan we de vereniging $\gamma$ van een positief convergente fundamentaalreeks van van elkaar verwijderd liggende reële getallen $c_1(\gamma), c_2(\gamma), \ldots$, de *telgetallen* der aanstuiving, en hun van iedere $c_\nu(\gamma)$ verwijderd ondersteldе limiet $c(\gamma)$, de *kern* der aanstuiving. Zij $\alpha$ een nog niet toetsbaar gebleken wiskundige assertie. Dan kan het scheppende subject naar het volgende voorschrift een onbegrensd voortschrijdende sequentie $R(\gamma, \alpha)$ van reële getallen $c_1(\gamma, \alpha)$, $c_2(\gamma, \alpha), \ldots$ creëren: Zolang bij de keuze der $c_n(\gamma, \alpha)$ aan het scheppende subject nòch de juistheid, nòch de absurditeit van $\alpha$ is gebleken, wordt iedere $c_n(\gamma, \alpha)$ gelijk aan $c(\gamma)$ gekozen. Zodra echter tussen de keuze van $c_{r-1}(\gamma, \alpha)$ en die van $c_r(\gamma, \alpha)$ aan het scheppende subject hetzij de juistheid, hetzij de absurditeit van $\alpha$ is gebleken, wordt zowel $c_r(\gamma, \alpha)$ als voor ieder natuurlijk getal $\nu$ ook $c_{r+\nu}(\gamma, \alpha)$ gelijk aan $c_r(\gamma)$ gekozen. Deze sequentie $R(\gamma, \alpha)$ convergeert positief tot een reëel getal $D(\gamma, \alpha)$, dat we een *dempingsgetal van $\gamma$ door $\alpha$* noemen.

§ 2.

Het *enkelvoudige beginsel van het uitgesloten derde* luidt als volgt:

*Een toewijzing $\tau$ van een eigenschap aan een wiskundige entiteit kan worden b e o o r d e e l d, d.w.z. hetzij haar juistheid, hetzij haar absurditeit kan worden bewezen.*

Voor een enkele zodanige assertie $\tau$ is de formulering van dit beginsel niet-contradictoor. Immers was het contradictoor, dan zou de absurditeit van $\tau$ tegelijk juist en absurd zijn, hetgeen onmogelijk is. Een eenvoudige redenering leert, dat voor een *eindig* aantal zodanige asserties $\tau$ de simultane formulering van het beginsel eveneens niet-contradictoor is. Doch voor de simultane formulering van het beginsel voor alle elementen van een *willekeurige* soort van zodanige asserties $\tau$ blijft deze niet-contradictoriteit niet gehandhaafd.

Bijvoorbeeld kan uit de onderstelling voor een bepaald reëel getal $c_1$, dat de assertie: $c_1$ *is rationaal,* hetzij juist hetzij contradictoor is gebleken, geen contradictie worden afgeleid. Zijn verder $c_1, \ldots c_m$ reële getallen, dan kan uit de simultane onderstelling voor $\nu = 1, \ldots, \nu = m$, dat de assertie: $c_\nu$ *is rationaal,* hetzij juist hetzij contradictoor is gebleken, evenmin een contradictie worden afgeleid. Doch de simultane onderstelling voor *alle* reële getallen c, dat de assertie: *c is rationaal,* hetzij juist hetzij contradictoor is gebleken, kan wel degelijk ad absurdum worden gevoerd.

Formuleren we dus als volgt het *volledige beginsel van het uitgesloten derde:*

*Ondersteld dat a, b en c soorten van wiskundige entiteiten zijn, dat a en b deelsoorten zijn van c en dat b bestaat uit de elementen van c die onmogelijk tot a kunnen behoren, dan is c identiek met de vereniging van a en b,*

dan is dit laatste beginsel contradictoor.

## § 3.

Een corollarium van het *enkelvoudige* beginsel van het uitgesloten derde zegt dat *indien voor een toewijzing $\tau$ van een eigenschap aan een wiskundige entiteit de niet-contradictoriteit, d.w.z. de absurditeit der absurditeit is bewezen, eveneens de juistheid van $\tau$ kan worden gedemonstreerd.*

Het analoge corollarium van het *volledige* beginsel van het uitgesloten derde is het *beginsel van reciprociteit der complementariteit* [1]), luidende als volgt:

*Ondersteld dat a, b en c soorten van wiskundige entiteiten zijn, dat a en b deelsoorten zijn van c en dat b bestaat uit de elementen van c die onmogelijk tot a kunnen behoren, dan bestaat a uit de elementen van c die onmogelijk tot b kunnen behoren.*

Een tweede corollarium van het *enkelvoudige* beginsel van het uitgesloten derde is het *enkelvoudige beginsel van toetsbaarheid,* luidende aldus:

*Een toewijzing $\tau$ van een eigenschap aan een wiskundige entiteit kan worden g e t o e t s t, d.w.z. hetzij haar niet-contradictoriteit, hetzij haar absurditeit kan worden bewezen.*

Het analoge corollarium van het *volledige* beginsel van het uitgesloten derde is het volgende *volledige beginsel van toetsbaarheid:*

*Ondersteld dat a, b, d en c soorten van wiskundige entiteiten zijn, dat a, b en d deelsoorten zijn van c, dat b bestaat uit de elementen van c die onmogelijk tot a kunnen behoren en dat d bestaat uit de elementen van c die onmogelijk tot b kunnen behoren, dan is c identiek met de vereniging van b en d.*

Als we de assertie ener absurditeit een *negatieve assertie* noemen, dan is voor negatieve asserties binnen een gegeven soort van wiskundige entiteiten ten eerste het beginsel van reciprociteit der complementariteit steeds van

---

1) Dit is zo te verstaan, dat indien binnen een gegeven soort van wiskundige entiteiten voor een gegeven eigenschap het beginsel van het uitgesloten derde geldt, binnen die soort voor die eigenschap eveneens het beginsel van reciprociteit der complementariteit van kracht is. De eveneens juiste, en bovendien, naar Jahresber. d. D. M. V. **33**, p. 252 (1924) werd opgemerkt, omkeerbare, interpretatie dat, zo voor alle wiskundige asserties het beginsel van het uitgesloten derde gold, eveneens voor alle wiskundige asserties het beginsel van reciprociteit der complementariteit van kracht zou zijn, is zonder wiskundige betekenis.

kracht, ten tweede het beginsel van toetsbaarheid æquivalent met het beginsel van het uitgesloten derde.

Zij namelijk $\alpha$ een negatieve assertie, uitsprekende de absurditeit der assertie $\beta$. Daar enerzijds de implicatie der waarheid ener assertie $a$ door de waarheid ener assertie $b$ de implicatie der absurditeit van $b$ door de absurditeit van $a$ impliceert, anderzijds de waarheid van $\beta$ de absurditeit der absurditeit van $\beta$ impliceert, wordt de absurditeit van $\beta$, d.w.z. $\alpha$, geïmpliceerd door de absurditeit der absurditeit der absurditeit van $\beta$, d.w.z. door de non-contradictoriteit van $\alpha$.

Verder, indien binnen een gegeven soort van wiskundige entiteiten voor $\alpha$ het beginsel van toetsbaarheid geldt, kan voor iedere wiskundige entiteit van deze soort hetzij de absurditeit der absurditeit van $\beta$ hetzij de niet-contradictoriteit der absurditeit van $\beta$, d.w.z., op grond van de vorige alinea, hetzij de absurditeit der absurditeit van $\beta$ hetzij de waarheid der absurditeit van $\beta$, d.w.z. hetzij de absurditeit hetzij de waarheid van $\alpha$ worden bewezen, zodat binnen de bedoelde soort voor $\alpha$ het beginsel van het uitgesloten derde van kracht is.

## § 4.

Klaarblijkelijk is het geldigheidsgebied van het beginsel van het uitgesloten derde identiek met de doorsnede der geldigheidsgebieden van het beginsel van toetsbaarheid en van het beginsel van reciprociteit der complementariteit. Verder is eerstgenoemd geldigheidsgebied een *eigenlijk* deelgebied van elk van beide laatstgenoemde geldigheidsgebieden, zoals uit de volgende voorbeelden blijkt:

Zij $A$ de soort der dempingsgetallen van aanstuivingen met rationale telgetallen, $B$ de soort der irrationale reële getallen, $C$ de vereniging van $A$ en $B$. Dan voldoen alle rationaliteitsasserties van een element van $C$ aan het beginsel van toetsbaarheid, terwijl er rationaliteitsasserties van een element van $C$ zijn, die niet aan het beginsel van het uitgesloten derde voldoen. Verder voldoen alle gelijkheidsasserties van twee reële getallen aan het beginsel van reciprociteit der complementariteit, terwijl er gelijkheidsasserties van twee reële getallen zijn, die niet aan het beginsel van het uitgesloten derde voldoen.

## § 5.

Voor wiskundige asserties is de absurditeitseigenschap, evenals de juistheidseigenschap, een *universeel additieve eigenschap*, d.w.z. als ze geldt voor ieder element $\alpha$ ener assertiesoort, geldt ze ook voor de assertie, die de vereniging der asserties $\alpha$ is. *Deze universele additiviteit bestaat niet voor de niet-contradictoriteitseigenschap.* Wèl bezit niet-contradictoriteit *eindige additiviteit*, d.w.z. als de asserties $\varrho$ en $\sigma$ niet-contradictoor zijn, is de assertie $\tau$ die de vereniging is van $\varrho$ en $\sigma$, eveneens niet-contradictoor. Immers gaan wij uit van de onderstelling $\omega$, dat $\tau$ contradictoor is, dan zou de juistheid van $\varrho$ de contradictoriteit van $\sigma$ ten gevolge hebben, die tegen de gegevens zou indruisen, zodat de juistheid van $\varrho$ absurd is, d.w.z. $\varrho$ is absurd. Maar deze consequentie der onderstelling $\omega$ is in strijd met de gegevens. Derhalve is de onderstelling $\omega$ contradictoor, d.w.z. $\tau$ is niet-contradictoor.

Door toepassing van dit theorema op de speciale niet-contradictore asserties, die door formuleringen van het beginsel van het uitgesloten derde voor een enkele assertie worden opgeleverd, blijkt de in § 2 vermelde niet-contradictoriteit der simultane formulering van genoemd beginsel voor een eindig aantal asserties.

## § 6.

Binnen een bepaalde soort van wiskundige entiteiten kunnen de absurditeiten van twee niet-æquivalente [2]) asserties æquivalent zijn. Bijvoorbeeld levert elk der volgende [3]) drie paren van niet-æquivalente asserties betreffende een reëel getal $a$:

I 1. $a = a$; I 2. hetzij $a \leq 0$, hetzij $a \geq 0$

II 1. $a \geq 0$; II 2. hetzij $a = 0$, hetzij $a \circ\!\!> 0$

III 1. $a > 0$; III 2. $a \circ\!\!> 0$

twee æquivalente absurditeiten.

## § 7.

Aan sommige absurditeiten van constructieve eigenschappen kan binnen een bepaalde soort van wiskundige entiteiten een constructieve vorm worden gegeven. Zo is voor elk natuurlijk getal $a$ de absurditeit van het bestaan van twee van $a$ en van 1 verschillende natuurlijke getallen, welker product $a$ is, æquivalent met het optreden van een rest, wanneer $a$ door een willekeurig van $a$ en van 1 verschillend natuurlijk getal wordt gedeeld. Evenzo kan voor twee reële getallen $a$ en $b$ de in noot [3]) als absurditeit ener constructieve eigenschap ingevoerde relatie $a \geq b$ als volgt constructief worden geformuleerd: Als $a$ en $b$ achtereenvolgens zijn gedefinieerd door de convergente onbepaald voortschrijdende sequenties van rationale getallen $a_1, a_2, \ldots$ en $b_1, b_2, \ldots$, kan voor ieder natuurlijk getal $n$ een zodanig natuurlijk getal $m$ worden berekend dat $a_\nu - b_\nu \circ\!\!> -2^{-n}$ voor $\nu \geq m$.

---

[2]) Onder niet-æquivalentie wordt verstaan absurditeit van æquivalentie, zoals onder niet-contradictoriteit wordt verstaan absurditeit van contradictoriteit.

[3]) Als voor twee reële getallen $a$ en $b$, achtereenvolgens gedefinieerd door de convergente onbepaald voortschrijdende sequenties van rationale getallen $a_1, a_2, \ldots$ en $b_1, b_2, \ldots$ twee zodanige natuurlijke getallen $m$ en $n$ kunnen worden berekend dat $b_\nu - a_\nu > 2^{-n}$ voor $\nu \geq m$, schrijven wij $b \circ\!\!> a$ en $a <\!\!\circ\, b$. Absurditeit van $a = b$ wordt uitgedrukt door $a \neq b$, absurditeit van $a <\!\!\circ\, b$ door $a \geq b$, simultane absurditeit van $a = b$ en $a <\!\!\circ\, b$ door $a > b$. De absurditeiten van $a <\!\!\circ\, b$ en $a < b$ blijken dan onderling æquivalent en de absurditeit van $a \geq b$ blijkt æquivalent met $a < b$.

Doch voor sommige andere absurditeiten van constructieve eigenschappen schijnt er weinig hoop te zijn, dat ooit een constructief æquivalent zal worden gevonden. In een vorige mededeling [4]) is dit gedemonstreerd aan de relaties $a \neq b$ en $a > b$ bij reële getallen $a$ en $b$. Voor de irrationaliteitseigenschap bij reële getallen blijkt er, als we haar constateren bij de dempingsgetallen van aanstuivingen met rationale kern en irrationale telgetallen, even weinig uitzicht op een constructief æquivalent te zijn.

## § 8.

Aan sommige niet-contradictoriteiten van constructieve eigenschappen $\zeta$ kan binnen een bepaalde soort van wiskundige entiteiten hetzij een constructieve vorm (al of niet ingevolge het bestaan voor $\zeta$ van reciprociteit der complementariteit), hetzij de vorm van absurditeit ener constructieve eigenschap worden gegeven. Zo is voor reële getallen $a$ en $b$ de niet-contradictoriteit van $a = b$ æquivalent met $a = b$ en de niet-contradictoriteit van: *hetzij* $a = b$ *hetzij* $a \circ\!\!> b$, æquivalent met $a \geq b$; verder de niet-contradictoriteit van $a \circ\!\!> b$ æquivalent zowel met de absurditeit van $a \leq b$, als met de absurditeit van: *hetzij* $a = b$ *hetzij* $a <\!\!\circ\, b$.

Doch voor sommige andere niet-contradictoriteiten van constructieve eigenschappen schijnt er weinig hoop te zijn, dat ooit een dergelijk æquivalent zal worden gevonden. Men denke bijvoorbeeld aan niet-contradictoriteit der rationaliteit bij reële getallen en constatere dan deze eigenschap bij de dempingsgetallen van aanstuivingen met rationale telgetallen.

## § 9.

Verstaan we onder *enkelvoudige absurditeit* der eigenschap $\eta$ de absurditeit van $\eta$ en onder $(n+1)$*-voudige absurditeit* van $\eta$ de absurditeit der $n$-voudige absurditeit van $\eta$, dan brengt een in § 3 afgeleid theorema tot uitdrukking, dat *drievoudige absurditeit æquivalent is met enkelvoudige absurditeit*. En een corollarium van dit theorema zegt dat *n-voudige absurditeit æquivalent is met enkelvoudige of met dubbele absurditeit, al naarmate n oneven of even is* [5]).

---

[4]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **51**, p. 963 (1948).

[5]) Vgl. Jahresber. d. D. M. V. **33**, p. 253 (1924).