Mathematics. — *Sur les espaces linéaires normés* VI. By A. F. MONNA. (Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of January 29, 1949.)

Cet article fait partie d'une série d'articles I, II, III, IV et V, publiés sous le même titre[1]), ayant pour but l'étude systématique des espaces linéaires normés totalement-non-archimédiens. Ces articles sont supposés connus. Plus spécialement l'article est lié à l'article II, où est donné un développement en série des éléments d'un espace totalement-non-archimédien localement compact. On verra qu'un développement en série analogue est possible pour des espaces plus généraux. Valution triviale du corps K, auquel appartiennent les coefficients, sera permis.

§ 1. *Nous ne considérons dans tout ce qui suit que des espaces linéares normés E totalement-non-archimédiens (voir I).*

La valuation du corps K est alors non-archimédienne (voir I, p. 1046). Les éléments a de K tels que $|a| \leqq 1$ constituent, comme il est connu, un anneau I. Les éléments a de K tels que $|a| < 1$ constituent dans I un idéal premier sans diviseurs $\mathfrak{p}$; l'anneau résiduaire $I/\mathfrak{p}$ est un corps. Si la valuation de K est triviale, les éléments de K appartiennent tous à des classes résiduaires mod $\mathfrak{p}$ différentes et alors $I/\mathfrak{p}$ est identique à K.

Pour chaque $C \in N_E$ l'ensemble des points $x \in E$ tels que $\|x\| \leqq C$ est un groupe abélien additif; de même l'ensemble des $x \in E$ tels que $\|x\| < C$. On peut donc déterminer dans ce premier groupe le groupe quotient des classes résiduaires mod $\|x\| < C$. Par E_C nous désignons l'ensemble des points $x \in E$ tels que $\|x\| \leqq C$. Cet ensemble E_C est un espace linéaire par rapport à l'anneau I. En effet, si $\|x\| \leqq C$, $\|y\| \leqq C$, on a $\|x+y\| \leqq \max(\|x\|, \|y\|) \leqq C$ et si de plus $a \in I$, donc $|a| \leqq 1$, on a $\|ax\| = |a| \cdot \|x\| \leqq C$.

Remarque. En se rapportant la définition des idéaux dans un anneau, on voit qu'il y a une analogie entre les idéaux et les sous-espaces E_C: on peut considérer ces espaces comme des idéaux de E par rapport à I. Supposons $a\xi \in E_C (a \in I, \xi \in E)$, donc $\|a\xi\| \leqq C$, et supposons ξ pas dans E_C, donc $\|\xi\| > C$; alors on a $|a| < 1$, de sorte que a appartient à l'ideal premier $\mathfrak{p}$ de I. A cause de cette propriété on peut appeler, d'après l'analogie avec la définition ordinaire des idéaux primaires, E_C un idéal

[1]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **49**, 1045—1055, 1056—1062, 1134—1141, 1142—1152 (1946); **51**, 197—210 (1948).

Voir aussi: I. S. COHEN, On non-Archimedean normed spaces; id. **51**, 693—698.

primaire par rapport à I. Cette analogie devient encore plus claire si nous supposons que le nombre 1 appartient à N_E de sorte qu'il existe un élément e de E tel que $\| e \| = 1$. On a alors: si $a\xi \in E_C$, ξ pas dans E_C, p. ex. $\| \xi \| = C'$ $(C' > C)$, alors il existe un nombre entier $\lambda > 0$ tel que $a^\lambda e \in E_C$. En effet, on a $| a | \leqq C \cdot C'^{-1}$ et il suffit de choisir λ tel que $(C \cdot C'^{-1})^\lambda \leqslant C$. Etant donné un $C < 1$, l'idéal $\mathfrak{p}$ se compose des éléments a de I tels qu'il existe un $\lambda > 0$ tel que $a^\lambda e \in E_C$. Ici λ depend de l'élément a. Si l'on suppose de plus que la valuation de K est discrète, on voit que l'ensemble des λ est borné: en effet, pour les a tels que $| a | < C$, on peut prendre $\lambda = 1$; puisque $| a | \leqq 1$ et N_K, est discret, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs $| a |$ entre C et 1, d'où il suit que l'ensemble des λ est borné. On peut donc, dans ce cas, considérer les E_C avec $C < 1$ comme des idéaux primaires par rapport à I, ayant tous le même idéal premier associé $\mathfrak{p}$.

Propriété A. *Par là nous entendons la propriété suivante: Si* $a \in K$ *parcourt un systéme complet* S *de représentants des classes résiduaires mod* $\mathfrak{p}$ *dans* I, *alors pour chaque* $C \in N_E$ *et pour chaque* $\xi \in E$ *tel que* $\| \xi \| = C$, ξ *étant fixé mais arbitrairement choisi,* $a\xi$ *parcourt un systéme complet de représentants des classes résiduaires* mod $\| x \| < C$ *dans* $\| x \| \leqq C$.

Remarques. 1. L'inverse de la propriété A est évident: si $b\xi$ (b fixé) parcourt un système complet de représentants, alors les éléments b figurants constituent un système complet mod $| a | < 1$. En effet, les éléments b appartiennent tous à des classes différentes: $| b_i - b_j | = 1$ si $i \neq j$. Si, inversement, a_1 et a_2 appartiennent à des classes mod $| a | < 1$ différentes, donc $| a_1 - a_2 | = 1$, alors $\| a_1 \xi - a_2 \xi \| = C$, donc $a_1 \xi$ et $a_2 \xi$ appartiennent à des classes différentes mod $\| x \| < C$.

2. La propriété A est vérifiée dans chaque espace dont tous les éléments x puissent être représentés dans la forme $x = a\xi$ ($a \in K$; ξ un élément fixe). En effet, soit $x_0 = b\xi$ $(b \neq 0)$, $\| x_0 \| = C$. Alors si a' et a'' sont dans S $(a' \neq a'')$ on a $\| (a' - a'') x_0 \| = C$, de sorte que $a' x_0$ et $a'' x_0$ appartiennent à des classes différentes. Si de plus $y = a_1 \xi = a_1 b^{-1} x_0$, $\| y \| = C$ est tel que $\| y - a x_0 \| = C$ pour tout a de S, on a

$$\| a_1 b^{-1} x_0 - a x_0 \| = C,$$

$$| a_1 b^{-1} - a | = 1, \quad , \quad | a_1 b^{-1} | = 1$$

de sorte que S étant complet, $a_1 b^{-1} = a_2$ appartient à S et $y = a_2 x_0$.

3. Si l'espace E lui-même est un corps et si $K = E$, la propriété A est vérifiée puisque si $x \in E$, $\| x \| = C$, il existe un $a \in K$ tel que $x = a\xi$ et $| a | = 1$. Voir alors la remarque précédente.

4. La propriété A est une extension de l'hypothèse, faite dans II, p. 1058, de l'égalité des indices de K et de E, qui étaient là finis.

5. Dans le cas où $N_E = N^K$ on peut se borner à vérifier la propriété

A pour une seule valeur de C puisqu'il résulte alors que $a\xi$ parcourt un système complet pour tout autre valeur $C' \in N_E$.

Propriété B. *L'espace totalement-non-archimédien E satisfait à la propriété B si l'ensemble N_E n'a, éventuellement, que 0 comme point d'accumulation. Soit $\{C_i\}$ l'ensemble des nombres appartenant à N_E:*

$$0 \ldots < C_n < C_{n+1} < \ldots \qquad (1)$$

Si la valution de K est triviale, il se peut, que $C_n = 0$ pour $n < m$; dans ce cas l'espace est discret, c'est à dire n'a pas de points d'accumulations. Si l'espace satisfait à la propriété B, nous écrivons, pour abréger, E_n au lieu de E_{C_n}. On a alors $E_{n-1} \subset E_n$ et l'ensemble des x tels que $\|x\| < C_{n+1}$ est identique à E_n.

Théorème 1. *Supposons que E satisfait aux propriétés A et B et soit L un sous-espace linéaire par rapport à I tel que*

$$E_{n-1} \subset L \subset E_n. \qquad (2)$$

Alors on a $L = E_n$ ou bien $L = E_{n-1}$. Il n'y a donc pas d'espaces linéaires entre E_{n-1} et E_n au sens strict.

Démonstration. Supposons $\xi \in L$, ξ pas dans E_{n-1}. Donc $\|\xi\| > C_{n-1}$ et puisque $\xi \in E_n$ donc $\|\xi\| = C_n$. Si a parcourt le système S (pour la définition voir la propriété A), $a\xi$ parcourt un système de représentants mod $\|x\| < C_n$. Un x donné arbitraire dans E_n tel que $\|x\| = C_n$, appartient donc à une et une seule des classes résiduaires, supposons à la classe représentée par $a\xi$. On a donc

$$\|x - a\xi\| < C_n. \qquad (3)$$

Ecrivons alors

$$x = a\xi + (x - a\xi). \qquad (4)$$

$a\xi$ appartient à L à cause de la linéarité de L par rapport à I. En vertu de (2) et (3) on a $x - a\xi \in E_{n-1} \subset L$ et alors il suit de (4) encore à cause de la linéarité de L, que $x \in L$. On a donc $L = E_n$. S'il n'existe pas un ξ comme il a été défini ci-dessus, on a $L = E_{n-1}$.

Remarque. Dans la terminologie de la théorie des idéaux (voir ci-dessus) on peut exprimer le théorème 1 en disant que les E_n constituent une série de composition dans E.

Ils existent des espaces satisfaisants à la propriété A mais dans lesquels le théorème 1 n'est pas vrai. Par exemple les espaces de la forme $x = a\xi$ déjà considérés ci-dessus (voir la remarque 2 précédente), en supposant que la valuation de K est non-discrète. Puisque N_K est alors partout dense, il existe un espace linéaire entre chaque couple d'espaces linéaires du type E_C et différant des deux espaces du couple. Ces espaces ne satisfont pas à la propriété B. Ceci est clair: la validité de la propriété B est une condition nécessaire pourque le théorème 1 soit vrai.

Si N_E a un point d'accumulation $C \neq 0$ le théorème n'est pas vrai comme on voit aisément (voir p. ex. l'espace considéré dans V, p. 204).

Théorème 2. *Supposons que E satisfait aux propriétés A et B et soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \in E_n$, x_0 pas dans E_{n-1}, donc $\|x_0\| = C_n$. Alors*

$$E_n = (x_0, E_{n-1}),$$

où (x_0, E_{n-1}) désigne l'espace linéaire par rapport à I déterminé par x_0 et E_{n-1} (donc les points $\lambda x_0 + y$; $\lambda \in I$, $y \in E_{n-1}$).

Démonstration. On a

$$E_{n-1} \subset (x_0, E_{n-1}) \subset E_n$$

en vertu de la linéarité de E_{n-1} et E_n par rapport à I. Avec le théorème 1 il s'ensuit

$$E_n = (x_0, E_{n-1}).$$

Théorème 3. *Supposons que E satisfait aux propriétés A et B. Soit E complet. Soient donnés pour tout n entier un $\xi_n \in E$ tel que $\|\xi_n\| = C_n$. Supposons que $a \in K$ parcourt le système complet S (voir la définition dans l'énoncé de la propriété A) et désignons ces éléments par des indices a_1, a_2, etc. Alors chaque $x \in E$ peut s'écrire dans une façon unique dans la forme*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n-i}\, \xi_{n-i} \qquad (a_{n-i} \in S)$$

$$\|x\| = C_n.$$

Démonstration. Posons $x_{-1} = \theta$ et supposons que pour $i < k$ on a déterminé les coefficients a_{n-i} dans S tels que

$$x_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} a_{n-i}\, \xi_{n-i},$$

$$x - x_{k-1} \subset E_{n-k}.$$

Il suit du théorème 2 qu'il existe un $\eta_{n-k} \in E_{n-k}$ tel que

$$(x - x_{k-1}) - \eta_{n-k} \in E_{n-(k+1)}.$$

η_{n-k} appartient à une des classes résiduaires mod $\|x\| < C_{n-k}$. La propriété A étant supposée satisfaite, il existe un élément a_{n-k} de S tel que

$$\|\eta_{n-k} - a_{n-k}\, \xi_{n-k}\| < C_{n-k}.$$

Donc

$$\eta_{n-k} - a_{n-k}\, \xi_{n-k} \in E_{n-(k+1)},$$

$$(x - x_{k-1}) - a_{n-k}\, \xi_{n-k} - (\eta_{n-k} - a_{n-k}\, \xi_{n-k}) \in E_{n-(k+1)},$$

$$x - x_{k-1} - a_{n-k}\, \xi_{n-k} \in E_{n-(k+1))}.$$

En posant alors

$$x_k = x_{k-1} + a_{n-k}\, \xi_{n-k}$$

on voit que la condition, permettant le raisonnement par induction, est satisfaite. On a

$$\|x - x_k\| \leqq C_{n-(k+1)} \to 0 \text{ si } k \to \infty$$

de sorte que

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n-i}\, \xi_{n-i}. \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

En remarquant que E est supposé complet on montre sans peine que chaque série de la forme (5) représent un élément de E. Il reste à démontre l'unicité du développement. Supposons

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n-i}\, \xi_{n-i} = \sum_{i=0}^{\infty} a'_{n-i}\, \xi_{n-i} \qquad (a_{n-i}, a'_{n-i} \in S)$$

et supposons de plus que pour $i < k$ on a démontré que $a_{n-i} = a'_{n-i}$. On peut supposer $C_{n-k} \neq 0$. Posons

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_{n-i}\, \xi_{n-i} = a_{n-k}\, \xi_{n-k} + \eta$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} a'_{n-i}\, \xi_{n-i} = a'_{n-k}\, \xi_{n-k} + \zeta.$$

On a

$$a_{n-k}\, \xi_{n-k} + \eta = a'_{n-k}\, \xi_{n-k} + \zeta = \chi,$$

$$\|a_{n-k}\, \xi_{n-k} - a'_{n-k}\, \xi_{n-k}\| = \|a_{n-k}\, \xi_{n-k} - \chi - (a'_{n-k}\, \xi_{n-k} - \chi)\| \leqq$$
$$\leqq \max(\|\eta\|, \|\zeta\|) \leqq C_{n-(k+1)}.$$

Si l'on avait $a_{n-k} \neq a'_{n-k}$, alors $|a_{n-k} - a'_{n-k}| = 1$ et le premier membre serait égal à C_{n-k} d'où une contradiction.

Théorème 4. *Supposons que l'espace totalement-non-archimédien E satisfait à la propriété B. Soient donnés pour tout n entier un $\xi_n \in E$ tel que $\|\xi_n\| = C_n$ et supposons que chaque $x \in E$ peut s'écrire dans la forme*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n-i}\, \xi_{n-i} \qquad (a_{n-i} \in S).$$

Alors E satisfait à la propriété A.

Démonstration. Les éléments $a\xi_n$ et $b\xi_n$ ($a \neq b$, $a, b \in S$) appartiennent à des classes résiduaires différentes puisque

$$\|a\xi_n - b\xi_n\| = |a - b| \cdot \|\xi_n\| = C_n.$$

Soit donné un $x \in E$ tel que $\|x\| = C_n$. On a

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n-i}\, \xi_{n-i},$$

$$x - a_n\, \xi_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n-i}\, \xi_{n-i},$$

$$\|x - a_n\, \xi_n\| \leqq C_{n-1} < C_n,$$

de sorte que x et $a_n \xi_n$ appartiennent à la même classe. Cette classe est donc représentée par $a_n \xi_n$.

En supposant que K est complet et $N_E = N_K$, de sorte qu'il existe un $\xi \in E$ tel que $\|\xi\| = 1$, il suit sans peine du théorème 3 que chaque espace qui satisfait aux conditions de ce théorème est de la forme $x = a\xi$, où a parcourt le corps K (comparer II p. 1060) [2]). Ceci est une inversion de la remarque 2 précédente, exprimant que chaque espace de la forme $a\xi$ satisfait à la propriété A. Bien entendu, la remarque 2 reste vraie même si la valuation de K est non-discrète; cependant le théorème 3 exige que la valuation est discréte.

Remarquons enfin que la série (5) n'a qu'un nombre fini de termes si $C_n = 0$ pour $n < m$.

Théorème 5. *Mêmes suppositions que pour le théorème 3. Supposons de plus que le corps $I/\mathfrak{p}$ est fini. Alors E est localement compact.*

Démonstration. Soit $x^{(k)}$ une suite bornée: $\|x^{(k)}\| \leqq C_\lambda$ pour $k = 1, 2, \ldots$. En vertu du théorème 3 on peut écrire

$$x^{(k)} = \sum_{i=0}^{\infty} a^{(k)}_{\lambda - i}\, \xi_{\lambda - i}$$

où éventuellement $a^{(k)}_\lambda = 0$. Puisque $I/\mathfrak{p}$ est fini, le système S a un nombre fini d'éléments; posons ce nombre $= n$. Pour le premier coefficient $a^{(k)}_\lambda (k = 1, 2, \ldots)$ il y a donc n possibilités. Il s'ensuit qu'il existe une suite infinie partielle avec la propriété que pour chaque élément de cette suite partielle le premier coefficient du développement est le même. On peut extraire de cette suite une nouvelle suite infinie avec la propriété que pour chaque élément le second coefficient est aussi le même. En continuant ainsi on arrive à une série de la forme (5), représentant donc un élément de E. On voit que ce point est un point d'accumulation de la suite $\{x^{(k)}\}$.

Théorème 6. *Mêmes suppositions que pour le théorème 3. Supposons que E est localement compact. Alors $I/\mathfrak{p}$ est fini.*

Démonstration. Le développement (5) est valable dans E. En supposant que $I/\mathfrak{p}$ est infini, il existe un système infini dénombrable $a_i \, (i = 1, 2, \ldots)$ tel que $|a_i - a_j| = 1 \; (i \neq j)$, $|a_i| = 1$. La suite $\{x^{(k)}\}$ définie par

$$x^{(k)} = a_k \xi_n + \sum_{i=1}^{\infty} b_{n-i}\, \xi_{n-i} \qquad (b_{n-i} \in S)$$

est bornée et on a

$$\|x^{(p)} - x^{(q)}\| = |a_p - a_q| \cdot \|\xi_n\| = C_n,$$

de sorte que cette suite n'a aucune suite partielle convergente; d'où une contradiction.

---

[2]) On peut élargir la condition $N_E = N_K$ d'une façon inessentielle en la remplacant par celle que $N_E = \{C\varrho^i\}$ si $N_K = \{\varrho^i\}$, où $C \neq 0$ est une constante.

Les résultats obtenus dans V permettent de construire des séries analogues à (5) dans les espaces séparables et complets qui satisfont à la propriété B en supposant de plus que le corps K est complet. Selon V il existe une suite de vecteurs (éventuellement un nombre fini) $y_1, y_2, \ldots$ telle que chaque $x \in E$ s'écrit dans la forme

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \qquad a_n \in K.$$

E est donc une somme directe d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'espaces de la forme $a y_n$. Chacun de ces espaces satisfait donc à la propriété A, de sorte qu'on peut appliquer le théorème 3. On arrive donc à un développement de la forme

$$x = \sum_{k=o}^{\infty} \lambda^{(1)}_{i_1-k}\, \xi^{(1)}_{i_1-k} + \sum_{k=o}^{\infty} \lambda^{(2)}_{i_2-k}\, \xi^{(2)}_{i_2-k} + \ldots .$$

Remarques. 1. Dans le théorème 5 on peut remplacer la supposition que la propriété A soit vraie dans l'espace par la condition suivante:

$$\ldots \cong E_n/E_{n-1} \cong E_{n+1}/E_n \cong \ldots \cong I/\mathfrak{p}$$

En effet puisqu'on y a supposé que $I/\mathfrak{p}$ est fini, on en dérive la validité de la propriété A.

En supposant de plus dans ce théorème que $N_E = N_K$, on a

$$\ldots \cong E_n/E_{n-1} \cong E_{n-1}/E_n \cong \ldots$$

de sorte qu'on peut simplifier encore cette condition: il suffit que

$$E_n/E_{n-1} \cong I\mathfrak{p}$$

pour une seule valeur de n.

2. On démontre tout analogue la compacité locale d'un espace qui est somme directe d'un nombre fini d'espaces $E^{(i)}$ dont chacun satisfait aux conditions du théorème 5 et qui ont tous le même corps K.

3. Dans I nous avons démontré (voir aussi l'étude de M. COHEN l.c.) que chaque espace totalement-non-archimédien localement compact possède une base finie, c'est à dire qu'il existe un système de vecteurs $x_1, \ldots, x_r$ tel que chaque $x \in E$ peut s'écrire dans la forme $x = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r$ $(a_i \in K)$. Valuation triviale de K n'était pas permise. En effet, comme nous avons déjà remarqué dans II, p. 1061, cette propriété n'est pas vraie si la valuation de K est triviale, ni même si N_E contient des nombres arbitrairement petits (dans ce dernier cas il faut que K est un corps fini; voir II, p. 1061).

4. Dans tout ce qui précède dans cet article valuation triviale de K est permise [3]).

---

[3]) Dans II, p. 1060, nous avons considéré comme exemple d'un espace, n'admettant pas le développement (5), un corps E, à valuation triviale, ayant une infinité d'éléments,

5. La théorie précédente admet comme cas particulier la théorie de M. VAN DANTZIG concernant les anneaux primitifs en tant qu'il s'agit les propriétés additives de ces anneaux; comparer la remarque p. 151 [4]).

§ 2. **Application.** Dans la théorie des approximations diophantiques on montre le théorème suivant:

Pour chaque système de nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et pour chaque $A > 0$ il existe au moins un système de fractions

$$\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}$$

où $q, p_1, \ldots, p_n$ sont des entiers rationnels, tel que

$$\left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n, q > A).$$

M. LOCK a donné un théoréme analogue concernant les nombres P-adiques [5]). La théorie précédente permet d'étendre cette propriété à une classe d'espaces linéaires.

Soit pour $i = 1, \ldots, n$, E_i un espace totalement-non-archimédien complet qui satisfait aux propriétés A et B. Le corps K soit le même pour tous ces espaces.

Supposons de plus que l'anneau résiduaire $I/\mathfrak{p}$ est fini et soit l le nombre des classes. Afin d'obtenir une simplification des formules on peut supposer sans nuire la généralité que les nombres $C_j^{(i)}$, constituant pour $-\infty > j > \infty$ l'ensemble N_{E_i}, sont numérotés de façon qu'on ait $C_0^{(i)} \leqq 1$, $C_1^{(i)} > 1$.

Soit Γ un sous-ensemble fini de K; soit $|p| \leqq 1$ pour tout $p \in \Gamma$. Soit enfin t un nombre naturel > 0 fixé. Supposons que le nombre des éléments de Γ soit plus grand que l^{nt}.

La théorie précédente et le principe des tiroirs fournissent maintenant une propriété concernant l'approximation d'un systéme d'éléments a_i tel que

$$a_i \in E_i, \|a_i\| \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

---

contenant un corps fini K (donc nécessairement à valuation triviale). Remarquons que cet espace ne satisfait pas à la propriété A.

L'hypothèse dans II, p. 1061, exprimant que la série (6) (II, p. 1058) représente la forme générale des espaces localement compacts, même si la valuation de K est triviale, est faux. En effet, si la valuation de K est triviale, la série (6) prend la forme $\lambda_1 \xi_1 + \ldots\ldots + \lambda_r \xi_r$ et ceci n'est pas la forme générale des espaces localement compacts dans ce cas. Le théorème 4 montre en effet que l'espace $x = \lambda_1 \xi_1 + \ldots\ldots + \lambda_r \xi_r + \ldots$, $\| \xi_r \| \to 0$, où λ_i appartient au système fini S, est localement compact.

[4]) D. VAN DANTZIG. Zur topologischen Algebra II. Compositio Mathematica 2, 201—223 (1935). Dans quelques démonstrations nous suivons cet article.

[5]) D. J. LOCK. Metrisch-diophantische onderzoekingen in $K(P)$ en $K^{(n)}(P)$. Diss. V.U. Amsterdam (1947).

Si $q \in \Gamma$, on a $\| q \alpha_i \| \leqq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ et l'application du théorème 3 donne

$$q \alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{-j}^{(i)} \xi_{-j}^{(i)},$$

où $a_{-j}^{(i)}$ appartient au système fini de représentants S. Soit $x_i \in E_i$ un élément ayant le développement

$$x_i = \sum_{j=0}^{nt-1} a_{-j}^{(i)} \xi_{-j}^{(i)}.$$

On a

$$q \alpha_i - x_i = \sum_{j=nt}^{\infty} a_{-j}^{(i)} \xi_{-j}^{(i)}.$$

Considérons pour $i = 1, \ldots, n$ les premier t termes du développement de $q \alpha_i - x_i$. On y trouve les $n\,t$ coefficients

$$a_{-nt}^{(i)}, \ldots, a_{-(nt+t-1)}^{(i)}.$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Puisqu'il y a l valeurs possible pour chaque a, ils existent l^{nt} combinaisons différentes. Pour chaque $q \in \Gamma$ on trouve ainsi une suite de coefficients et puisque le nombre des q est plus grand que l^{nt}, ils existent au moins deux q, supposons q' et q'', ayant la même suite de coefficients. Pour tout $i = 1, \ldots, n$ le développement de $(q' - q'') \alpha_i - (x'_i - x''_i)$ commence donc par le terme

$$a_{-nt-t}^{(i)} \xi_{-nt-t}^{(i)}.$$

On a donc

$$\| (q' - q'') \alpha_i - (x'_i - x''_i) \| \leqq C_{-nt-t}^{(i)}$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Ceci est le théorème d'approximation dans une forme très générale. Le théorème de LOCK concernant les nombres P-adiques y est contenu comme cas particulier.

En supposant que $N_{E_i} = N_K$, les E_i ont la forme $a \zeta i$, où $a \in K$ et où ζ_i est un élément de E_i tel que $\| \zeta_i \| = 1$. L'inégalité devient alors

$$\| (q' - q'') \alpha_i - (p'_i - p''_i) \zeta_i \| \leqq C_{-nt-t}^{(i)}.$$

Dans ce cas (excluant le cas de valuation triviale de K) les éléments de K puissent être représentés par une série. En effet, supposons que N_K consiste des éléments ϱ^j $(\varrho > 1)$, et introduisons les éléments $\eta_j \in K$, $|\eta_j| = \varrho^j$. On a alors pour chaque $a \in K$

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k} \eta_{i-k} \qquad (a_{i-k} \in S).$$

Puisque $N_{E_i} = N_K$, on peut choisir pour les éléments $\xi_j^{(i)}$ les éléments $\xi_j^{(i)} = \eta_j \zeta_i$. On trouve

$$x_i = \sum_{j=0}^{nt-1} a_{-j}^{(i)} \eta_{-j} \zeta_i = \zeta_i \sum_{j=0}^{nt-1} a_{-j}^{(i)} \eta_{-j} = p_i \zeta_i.$$

Choisissons pour Γ le système des éléments de la forme

$$\sum_{j=0}^{nt} a_{-j} \eta_{-j}$$

où les a_{-j} parcourent le système S indépendamment l'un de l'autre; le nombre de ces éléments est l^{nt+1}. On voit que dans ce cas p_i appartient à Γ.

On peut donc alors approximer le système $a_1, \ldots, a_n$ *simultanément à l'aide de différences d'éléments de* Γ.

Si E_i est le corps des nombres P-adiques on peut arranger par un choix convenable de Γ que $q' - q''$ aussi appartient à Γ: il suffit de prendre pour Γ le système des nombres $0, 1, \ldots, P, \ldots, P^{nt}$. En effet, alors, si $q', q'' \in \Gamma$, ou bien $q' - q''$ ou bien $q'' - q'$ appartient à Γ. La possibilité d'ordonner Γ est ici essentiel.

's-Gravenhage, décembre 1948.