MATHEMATICS

SUR L'ORDRE DE GRANDEUR DES FONCTIONS SOMMABLES

PAR

I. S. GÁL ET J. F. KOKSMA

(Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT at the meeting of March 25, 1950)

§ 1. *Introduction.*

1. 1. Concernant l'ordre de grandeur d'une suite de fonctions sommables, on a un théorème bien connu:

Supposons que les fonctions $F_N(x)$ $N = 1, 2, \dots$ appartiennent à la classe L^p dans l'intervalle $(0, 1)$ *et que*

$$\int_0^1 |F_N(x)|^p \, dx = O(\Phi(N)). \tag{1}$$

Si la fonction $\varphi(N) > 0$ est telle que

$$\sum_{N=1}^{\infty} \varphi(N)^{-1} < \infty,$$

alors

$$F_N(x) = o(\Phi(N)\, \varphi(N))^{1/p}, \tag{2}$$

presque partout dans $0 \leqq x \leqq 1$.

Nous allons démontrer ce théorème plus tard dans la forme d'un lemme (lemme 1), qui joue un certain rôle dans cet ordre d'idées. Montrons seulement que, dans un certain sens, on ne peut pas améliorer ce théorème.

Soient $\Phi(N) > 0$ et $\varphi(N) > 0$ deux fonctions croissantes quelconques, la deuxième choisie de telle façon que la série $\sum\limits_1^{\infty} \varphi(N)^{-1}$ diverge vers $+\infty$. Il existe alors une suite $\{F_N(x)\}$ telle que (1) est valable, mais (2) est en défaut pour chaque valeur de x.

Pour construire une suite $\{F_N(x)\}$ jouissant la propriété énoncée, considérons les nombres

$$a_1 = 0 \quad , \quad b_1 = \varphi(1)^{-1} - [\varphi(1)^{-1}],$$

$$a_N = \sum_1^{N-1} \varphi(n)^{-1} \pmod 1 \quad \text{et} \quad b_N = \sum_1^{N} \varphi(n)^{-1} \pmod 1 \qquad (0 \leqq a_N < 1,\ 0 \leqq b_N < 1).$$

Si $a_N < b_N$, soit I_N l'intervalle ouvert (a_N, b_N). Si au contraire $a_N > b_N$, désignons par I_N la réunion des intervalles ouverts $(0, b_N)$ et $(a_N, 1)$. La mesure de l'ensemble I_N est en tout cas $\varphi(N)^{-1}$. Donc si nous posons

$$F_N(x) = \begin{cases} (\Phi(N)\, \varphi(N))^{1/p} & \text{dans } I_N, \\ 0 & \text{pour les autres valeurs de } x, \end{cases} \tag{3}$$

la relation (1) est valable. Mais nous avons supposé que $\sum\limits_{1}^{\infty} \varphi(N)^{-1}$ diverge, donc d'après la définition de I_N, un point x quelconque appartient à une infinité d'ensembles I_N, c'est à dire $F_N(x) = (\Phi(N)\,\varphi(N))^{1/p}$ pour une infinité des valeurs de N. Donc la relation (2) n'est pas valable pour la fonction (3).

D'autre part il existe des suites $\{F_N(x)\}$ satisfaisantes (1) dont l'ordre de grandeur est en réalité beaucoup plus petit que l'ordre donné par la formule (2) si l'on suppose que $\varphi(N) > 0$ est croissante, telle que $\sum\limits_{N=1}^{\infty} \varphi(N)^{-1}$ converge. Posons par example $F_N(x) = N^{1/p}$ dans $(0, 1)$, nous pouvons choisir $\Phi(N) = N$. Le théorème précédent ne donne que des résultats moins forts que $O(N^{2/p})$, quoique d'après la définition $F_N(x) = O(N^{1/p})$ pour tout x dans $(0, 1)$.

1. 2. Les remarques précédentes nous amènent de poser la question suivante: Quelles sont les hypothèses naturelles, plus restrictives que (1), qui permettent de déterminer plus précisement l'ordre de grandeur de la suite $\{F_N(x)\}$?

On peut supposer par example, que l'estimation

$$\int_0^1 |F_{M+N}(x) - F_M(x)|^p \, dx = O(\Phi(M, N)) \tag{4}$$

$M = 0, 1, \ldots;\ N = 1, 2, \ldots$ *est valable, et on cherche l'ordre de grandeur de* $F_N(x)$.

Dans cette direction pour le cas $p = 2$, $\Phi(M, N) = N$, M. H. RADEMACHER a démontré un résultat, qu'on peut énoncer comme suit [1]):

Si la suite de fonctions $F_N(x) - F_{N-1}(x)$ *est une suite presque-orthogonale dans* $(0, 1)$, *alors*

$$F_N(x) = o\,(N \log^{3+\varepsilon} N)^{1/2} \tag{5}$$

presque partout dans $(0, 1)$.

Parce que nous n'avons pas besoin de la notion d'une suite presque-orthogonale, nous renvoyons le lecteur pour les détails au mémoire de M. RADEMACHER [2]).

M. RADEMACHER a basé la démonstration de (5) sur un théorème concernant les séries orthogonales (théorème de H. RADEMACHER [3]) et

---

[1]) H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. **87**, 112—138 (1922).

Ici on trouve aussi des renseignements sur la littérature antérieure. L'idée fondamentale de RADEMACHER avait été utilisée déjà dans des recherches de HOBSON et PLANCHEREL; il prend son origine dans un travail de WEYL.

[2]) Voir [1]). D'après le mémoire de M. RADEMACHER, la notion de la suite presque-orthogonale a été introduite probablement par I. SCHUR. Voir aussi le mémoire de MM. M. KAC, R. SALEM et A. ZYGMUND, A gap theorem. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 235—243 (1948).

[3]) Voir [1]).

D. MENCHOFF [4])). On ne peut pas utiliser ce procédé pour le cas plus général, c'est à dire pour $p > 2$, $\Phi(M, N) \neq N$. En utilisant certaines modifications nous allons démontrer un théorème général (§ 2, théorème 1), qui renferme comme cas particulier le résultat de M. RADEMACHER (sans la condition que la suite soit presque-orthogonale) et quelques résultats précédents des auteurs [5]) [6]).

Après la démonstration de notre théorème, nous discuterons les cas spéciaux qui ont une importance au point de vue des applications (§ 3, théorèmes 2—7).

§ 2. *Le théorème général.*

2. 1. Tout d'abord nous allons donner quelques définitions. Il y a lieu de remarquer, en passant, que la fonction $F(M, N; x) \geqq 0$ de laquelle nous parlerons, n'est pas autre chose, que la généralisation de la fonction

$$F(M, N; x) = |F_{M+N}(x) - F_M(x)|.$$

L'inégalité (6) ci dessous, de la même façon, signifie la généralisation de l'inégalité du triangle

$$|F_{M+N}(x) - F_M(x)| \leqq |F_{M+N'}(x) - F_M(x)| + |F_{M+N}(x) - F_{M+N'}(x)|.$$

En général, dans les applications la fonction $F_N(x)$ n'est autre chose que la somme partielle d'une série

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_N(x) + \dots$$

non nécessairement convergente.

Définition. *Soit S une partie mesurable d'un espace euclidien lieu de points x. Supposons que les fonctions $F(M, N; x) \geqq 0$; $x \in S$; $M = 0, 1, \dots$; $N = 0, 1, \dots$ définies sur S, appartiennent à la classe L^p, où $p \geqq 1$. Supposons enfin que $F(M, 0; x) = 0$ pour $M = 0, 1, \dots$ et que*

$$(6) \qquad F(M, N; x) \leqq F(M, N'; x) + F(M + N', N - N'; x)$$

pour tout $M = 0, 1, \dots$ et pour tout couple (N, N') satisfaisant $0 \leqq N' \leqq N$.

A partir de cette définition on peut démontrer le théorème général suivant:

Théorème 1.

A. Supposons que pour tout couple $M = 0$, $N = 2^n$ $(n = 1, 2, \dots)$ et

[4]) MENCHOFF, D., Sur les séries de fonctions orthogonales. Fund. Math. **4**, 82—105 (1923).

[5]) GÁL, I. S. et J. F. KOKSMA, Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables. C. R. Acad. Sci. Paris **227**, 1321—1323 (1948).

[6]) GÁL, I. S., Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables. C. R. Acad. Sci. Paris **228**, 636—638 (1949).

pour tout couple M, N avec $M \geqq 1$, $0 \leqq N \leqq M-1$, M et N étant entiers non-negatifs,

$$\int_S F(M, N; x)^p\, dx \leqq C\,\Phi(M, N) \tag{7}$$

où $\Phi(M, N) > 0$ et où C désigne une constante positive.

B. Soit $\varkappa(n, \lambda) \geqq 1$; $n = 1, 2, \ldots$; $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ et soit $\varphi(N) > 0$ une fonction non-décroissante, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\Phi(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n, \lambda)^p \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})\Big)\, \varphi(2^n)^{-1} < \infty.$$

C. Soit finalement

$$K(N) = \begin{cases} 1 & \text{, si } p = 1; \\ \underset{(2^\nu \leqq N)}{\text{maximum}} \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{\nu} \varkappa(\nu, \lambda)^{-\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1} & \text{, si } p > 1, \end{cases} \tag{8}$$

où le maximum est pris par rapport à tous les $\nu = 1, 2, \ldots, [\log N/\log 2]$; $N \geqq 2$.

Conclusion.

$$F(0, N; x) = o\left((K(N)\, \varphi(N))^{1/p}\right)$$

pour presque toutes les valeurs $x \in S$.

Si, par example, $F(M, N; x) = |f_{M+1}(x) + \ldots + f_{M+N}(x)|$ où les fonctions $f_N(x)$ sont à p-ième puissance sommables, notre théorème donne une estimation pour la somme

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_N(x)$$

qui est valable presque partout.

2. 2. Pour la démonstration de ce théorème nous avons besoin de deux lemmes. L'un de ces lemmes n'est autre chose que le théorème du § 1.

Lemme 1. *Si les fonctions $a_n(x) \geqq 0$; $n = 1, 2, \ldots$ sont intégrables au sens de Lebesgue dans S et si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_S a_n(x)\, dx < \infty,$$

alors $a_n(x) = o(1)$ presque partout dans S.

Démonstration. D'après un théorème connu de ABEL [7]), il existe une suite de nombres croissants positifs, telle que

$$a(n) \to \infty \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_S a(n)\, a_n(x)\, dx < \infty. \tag{9}$$

Soit E l'ensemble des points $x \in S$ pour lesquels $\limsup a(n)\, a_n(x) \geqq 1$,

---

[7]) Voir K. KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin, 302 (1931).

si $n \to \infty$. Désignons par $\mu(E)$ la mesure de l'ensemble E. Définissons E_n comme l'ensemble des points x pour lesquels $2\alpha(n)\, a_n(x) > 1$.

Donnons nous maintenant un nombre $\varepsilon > 0$ en avance. D'après (9) nous pouvons choisir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ de telle sorte que

$$(10) \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_S \alpha(n)\, a_n(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, selon la définition des ensembles E et E_n, nous avons $E \subset E_{n_0} + E_{n_0+1} + \ldots$ quelque soit $n_0 \geqq 1$ donc

$$\mu(E) \leqq \sum_{n=n_0}^{\infty} \mu(E_n) \leqq 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{E_n} \alpha(n)\, a_n(x)\, dx \leqq 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_S \alpha(n)\, a_n(x)\, dx.$$

Par conséquent, vu (10), $\mu(E) < \varepsilon$ quelque soit $\varepsilon > 0$. Cela veut dire que $\mu(E) = 0$. Ainsi, nous avons $\limsup \alpha(n)\, a_n(x) < 1$ pour presque toutes les valeurs $x \in S$. Mais, $\alpha(n) \to \infty$, donc en effet, l'on a $a_n(x) = o(1)$.

Pour compléter l'exposé vérifions en passant le théorème de § 1. Choisissons $S \equiv (0, 1)$ et $a_n(x) = |F_n(x)|^p\, (\Phi(n)\, \varphi(n))^{-1}$. Selon (1) nous avons

$$\int_S a_n(x)\, dx = O(\varphi(n)^{-1})$$

alors, d'après l'hypothèse $\sum_1^{\infty} \varphi(n)^{-1} < \infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_S a_n(x)\, dx < \infty.$$

Or, nous pouvons utiliser le lemme 1, qui donne

$$a_n(x) = |F_n(x)|^p\, (\Phi(n)\, \varphi(n))^{-1} = o(1),$$

c'est à dire que $F_n(x) = o\, (\Phi(n)\, \varphi(n))^{1/p}$ pour presque tout x, $0 \leqq x \leqq 1$.

2. 3. Considérons maintenant le second lemme, qui est nécessaire pour la démonstration du théorème 1. Ce lemme contient la généralisation d'une inégalité fondamentale de M. Rademacher. [8])

Lemme 2. *Supposons que* $p \geqq 1$ *et* $\varkappa(n, \lambda) \geqq 1$ *pour* $n = 1, 2, \ldots;$ $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. *Désignons par* $F(M, N; x) \geqq 0$; $F(M, 0; x) = 0$; $M, N = 0, 1, \ldots$ *une suite de fonctions de* $x \in S$ *pour lesquelles l'inégalité* (6) *est valable. Désignons de plus par* $K(N)$ $(N \geqq 2)$ *la fonction définie plus haut par* (8). *Posons pour* $n \geqq 1$:

$$H(n, p; x) = \Big(F(0, 2^n; x)^p + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n, \lambda)^p \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x)^p\Big)^{1/p}.$$

Alors nous avons

$$F(0, N; x) \leqq K(N)^{1/p}\, H(n(N), p; x)$$

pour tout $x \in S$ $(N \geqq 2)$, *où l'entier* $n = n(N)$ *est défini par* $2^{n(N)} \leqq N < 2^{n(N)+1}$.

[8]) Voir [1]).

Démonstration. Soit $N \geqq 2$ donné en avance. On peut écrire

(11) $$N = 2^n + \varepsilon_{n-1}\, 2^{n-1} + \ldots + \varepsilon_1 \cdot 2 + \varepsilon_0$$

où $n = n(N) \geqq 1$ et $\varepsilon_i = 0, 1$ pour $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$. D'après (6), nous obtenons de proche en proche, que

$$\begin{aligned} F(0, N; x) &\leqq F(0, 2^n; x) + F(2^n, \varepsilon_{n-1}\, 2^{n-1} + \ldots + \varepsilon_0; x) \leqq \\ &\leqq F(0, 2^n; x) + F(2^n, \varepsilon_{n-1}\, 2^{n-1}; x) + \\ &\qquad + F(2^n + \varepsilon_{n-1}\, 2^{n-1}, \varepsilon_{n-2}\, 2^{n-2} + \ldots + \varepsilon_0; x) \leqq \\ &\leqq F(0, 2^n; x) + F(2^n, \varepsilon_{n-1}\, 2^{n-1}; x) + \\ &\qquad + F(2^n + \varepsilon_{n-1}\, 2^{n-1}, \varepsilon_{n-2}\, 2^{n-2}; x) + \\ &\qquad + F(2^n + \varepsilon_{n-1}\, 2^{n-1} + \varepsilon_{n-2}\, 2^{n-2}, \varepsilon_{n-3}\, 2^{n-3} + \ldots + \varepsilon_0; x) \leqq \\ &\leqq F(0, 2^n; x) + F(2^n, \varepsilon_{n-1}\, 2^{n-1}; x) + \\ &\qquad + \sum_{\lambda=1}^{n-1} F(2^n + \varepsilon_{n-1}\, 2^{n-1} + \ldots + \varepsilon_\lambda\, 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1}\, 2^{\lambda-1}; x). \end{aligned}$$

Soient maintenant

(12) $\mu_n = 0$ et $\mu_\lambda = \varepsilon_\lambda + \varepsilon_{\lambda+1}\, 2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\, 2^{n-\lambda-1}$ pour $\lambda = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

D'après l'inégalité précédente, nous obtenons

(13) $$F(0, N; x) \leqq F(0, 2^n; x) + \sum_{\lambda=1}^{n} F(2^n + \mu_\lambda\, 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1}\, 2^{\lambda-1}; x).$$

Parce que nous avons supposé que $F \geqq 0$ et que $F(M, 0; x) = 0$, nous avons

$$F(2^n + \mu_\lambda\, 2^\lambda; \varepsilon_{\lambda-1}\, 2^{\lambda-1}; x) \leqq F(2^n + \mu_\lambda\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x).$$

En vertu de (13) on a donc

(14a) $$F(0, N; x) \leqq F(0, 2^n; x) + \sum_{\lambda=1}^{n} F(2^n + \mu_\lambda\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x)$$

pour tout $N \geqq 2$, où les valeurs

(14b) $$n \geqq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqq \mu_\lambda \leqq 2^{n-\lambda} - 1$$

sont définies par (11) et (12).

Supposons maintenant que $p = 1$, par conséquent $K(N) = 1$. Vu (14 a) et $\varkappa(n, \lambda) \geqq 1$, nous avons

$$F(0, N; x) \leqq F(0, 2^n; x) + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n, \lambda)\, F(2^n + \mu_\lambda\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x),$$

alors d'après (14 b)

$$\begin{aligned} F(0, N; x) &\leqq F(0, 2^n; x) + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n, \lambda) \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} F(2^n + \mu_\lambda\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x) = \\ &= H(n, 1; x) = K(N)^{1/p}\, H(n(N), 1; x). \end{aligned}$$

Le lemme est ainsi démontré pour $p = 1$.

Si $p > 1$, nous allons utiliser l'inégalité de HÖLDER [9]) en forme

$$\sum A_i B_i \leqq \left(\sum A_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} (\sum B_i^p)^{1/p} \qquad (A_i \geqq 0,\ B_i \geqq 0).$$

D'après l'inégalité (14 a), nous trouvons que

$$F(0, N; x) \leqq F(0, 2^n; x) + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n,\lambda)^{-1} (\varkappa(n,\lambda)\, F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x)) \leqq$$

$$\leqq \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n,\lambda)^{-\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\cdot \left(F(0, 2^n; x)^p + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n,\lambda)^p F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x)^p\right)^{1/p}.$$

Mais on a

$$\left(1 + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n,\lambda)^{-\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqq \left(\underset{(\nu\leqq n)}{\text{maximum}} \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{\nu} \varkappa(\nu,\lambda)^{-\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\right)^{1/p}$$

$$\text{et donc} \qquad \leqq K(N)^{1/p}.$$

En effet, $n = n(N)$ est telle que $2^n \leqq N < 2^{n+1}$, donc le maximum est pris par rapport à tous les $\nu = 1, 2, \ldots, [\log N/\log 2]$, c'est à dire pour les mêmes valeurs comme dans (8).

D'autre part en utilisant (14b), on obtient que

$$\left(F(0, 2^n; x)^p + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n,\lambda)^p F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x)^p\right)^{1/p} \leqq$$

$$\leqq \left(F(0, 2^n; x)^p + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n,\lambda)^p \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x)^p\right)^{1/p} = H(n, p; x).$$

Enfin, en combinant les trois dernières inégalités, nous obtenons

$$F(0, N; x) \leqq K(N)^{1/p} H(n(N), p; x).$$

Ainsi le lemme est aussi démontré pour $p > 1$.

2. 4. Nous allons démontrer maintenant le théorème 1. D'après la définition de $H(n, p; x)$ (Lemme 2), en utilisant l'hypothèse A nous obtenons que

$$\int_S H(n, p; x)^p\, dx \leqq C \left\{ \Phi(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n,\lambda)^p \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}) \right\}.$$

Donc, si nous posons

$$a_n(x) = H(n, p; x)^p \cdot \varphi(2^n)^{-1},$$

nous avons

$$\int_S a_n(x)\, dx \leqq C \left\{ \left(\Phi(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n,\lambda)^p \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})\right) \varphi(2^n)^{-1} \right\}.$$

[9]) Voir G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. PÓLYA, Inequalities, Cambridge, 24 (1934).

Ainsi, en utilisant l'hypothèse B l'on a

$$\sum_1^\infty \int_S a_n(x)\,dx < \infty.$$

Or, d'après le lemme 1, on obtient

$$a_n(x) = \frac{H(n, p; x)^p}{\varphi(2^n)} = o(1)$$

presque partout dans S.
Posons $n = n(N)$, tel que $2^n \leqq N < 2^{n+1}$, alors il résulte que

$$H(n(N), p; x) = o(\varphi(N))^{1/p}$$

pour presque tout $x \in S$. Donc, en utilisant le résultat du lemme 2, nous avons en effet

$$F(0, N; x) = o(K(N)\,\varphi(N))^{1/p}$$

presque partout dans S. Ainsi le théorème 1 est complètement démontré.

§ 3. *Les cas spéciaux.*

3. 1. Dans ce chapitre nous allons considérer quelques cas spéciaux du théorème 1. Nous avons seulement supposé que $\Phi(M, N)$ est une fonction positive. Maintenant supposons que $\Phi(M, N) = \Psi(N)\,\Phi^*(M, N)$, où $\Psi(N)/N^{1+\gamma}$; $\gamma \geqq 0$, est une fonction non-décroissante, et $\Phi^*(M, N) > 0$. C'est principalement le cas $\Phi^*(M, N) \geqq 1$ qui nous interesse[10]. Tout d'abord, pour le cas $\gamma = 0$, on peut montrer le théorème suivant:

Théorème 2.
Supposons que (C désignant une constante positive)

$$\int_S F(M, N; x)^p\,dx \leqq C\,\Psi(N)\,\Phi^*(M, N) \qquad (M \geqq 0,\ N \geqq 1)$$

où $\Psi(N)/N$ est non-décroissante et $\Phi^*(M, N) \geqq 1$. Soit $\psi(N) > 0$ une fonction non-décroissante et telle que

$$\psi(2^n) \geqq \Phi^*(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{\lambda-n}\,\Phi^*(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}),$$

alors, si $\chi(N)$ désigne une fonction non-décroissante et positive telle que $\sum_{N=1}^{\infty} (N\chi(N))^{-1} < \infty$, on a

$$F(0, N; x) = o(\Psi(N)\,\psi(N)\,\chi(N)\,(\log N)^{p-1})^{1/p}$$

presque partout dans S.

Remarque. Parce que $\chi(N)$ est non-décroissante les assertions

$$\sum_{(N)} (N\chi(N))^{-1} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{(n)} \chi(2^n)^{-1} < \infty$$

sont équivalentes. Notons encore une fois qu'il suffit avoir l'estimation $O(\Psi(N)\,\Phi^*(M, N))$ seulement pour les couples $(0, 2^n)$ et (M, N) $(M \geqq 1,\ 0 \leqq N \leqq M - 1)$.

---

[10]) Dans les théorèmes 2—5 la Définition de § 2. 1 est sousentendue.

Démonstration. Posons dans le théorème 1

$$\varphi(N) = 2\,\Psi(N)\,\psi(N)\,\chi(N) \quad \text{et} \quad \varkappa(n, \lambda) \equiv 1.$$

Si $p > 1$, nous avons

$$K(N) = \underset{(2^{\nu} \leqq N)}{\text{maximum}} \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{\nu} 1\right)^{p-1} = O\,(\log N)^{p-1}, \tag{15}$$

par conséquent (15) est valable pour $p \geqq 1$.

Montrons que l'hypothèse B du théorème 1 est vérifiée. D'après la supposition on a

$$\Psi(2^{\lambda}) \leqq 2^{\lambda-n}\,\Psi(2^n)$$

pour $\lambda = 1, 2, \ldots n$. Donc vu $\varkappa(n, \lambda) = 1$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\Phi(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n, \lambda)^p \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi(2^n + \mu_\lambda 2^{\lambda}, 2^{\lambda-1})\Big)\,\varphi(2^n)^{-1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\Psi(2^n)\,\Phi^*(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Psi(2^{\lambda})\,\Phi^*(2^n + \mu_\lambda 2^{\lambda}, 2^{\lambda-1})\Big)$$

$$\big(\Psi(2^n)\,\psi(2^n)\,\chi(2^n)\big)^{-1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\Phi^*(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{\lambda-n}\,\Phi^*(2^n + \mu_\lambda 2^{\lambda}, 2^{\lambda-1})\Big)\,\big(\psi(2^n)\,\chi(2^n)\big)^{-1}$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \big(\chi(2^n)\big)^{-1} < \infty.$$

Maintenant toutes les hypothèses A, B, et C du théorème 1 sont satisfaites. On peut donc utiliser le théorème 1, et par (15):

$$F(0, N; x) = o\Big((\log N)^{p-1}\,\Psi(N)\,\psi(N)\,\chi(N)\Big)^{1/p}$$

presque partout.

3. 2. Maintenant le théorème 2 étant établi, nous l'allons spécialiser pour le cas $\Phi^*(M, N) \equiv 1$. Ainsi nous avons

$$\Phi^*(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{\lambda-n}\,\Phi^*(2^n + \mu_\lambda 2^{\lambda}, 2^{\lambda-1}) =$$

$$= 1 + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{\lambda-n} = n + 1 < 4 \log 2^n.$$

Par conséquent on peut choisir $\psi(N) = 4 \log N$, $\chi(N) = \log^{1+\varepsilon} N$ et l'on obtient le résultat suivant:

Théorème 3.
Si

$$\int_S F(M, N; x)^p\,dx = O\,(\Psi(N))$$

uniformement dans $M = 0, 1, \ldots,$ *où* $\Psi(N)/N$ *est une fonction non-décroissante, alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a*

$$F(0, N; x) = o\,(\Psi(N)\,(\log N)^{p+1+\varepsilon})^{1/p}$$

presque partout dans S.

Finalement notons que dans le cas $\Psi(N) = N$, $p = 2$, ce théorème donne le résultat (5), c'est à dire l'estimation de M. RADEMACHER. [11])

3. 3. Considérons maintenant l'autre cas, c'est à dire le cas où $\Psi(N)/N^{1+\gamma}$ est non-décroissante et $\gamma > 0$.

Pour ce cas on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 4:

Supposons que

$$\int_S F(M, N; x)^p \, dx \leqq C\, \Psi(N)\, \Phi^*(M, N) \qquad (M \geqq 0;\ N \geqq 1),$$

où C désigne une constante positive et où $\Psi(N)/N^{1+\gamma}$ est non-décroissante, γ désignant une constante positive et $\Phi^*(M, N) \geqq 1$. Soit $\psi(N) > 0$ une fonction non-décroissante et telle que

$$\psi(2^n) \geqq \Phi^*(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{(\lambda-n)(1+a)} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi^*(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}), \tag{16}$$

avec une valeur constante $a > 0$ et $< \gamma$, alors, si $\chi(N)$ désigne une fonction positive, non-décroissante de N, telle que $\sum (N\chi(N))^{-1} < \infty$, on a

$$F(0, N; x) = o\,(\Psi(N)\, \psi(N)\, \chi(N))^{1/p} \tag{17}$$

presque partout dans S.

Démonstration. Pour obtenir ce résultat, nous allons prouver, ainsi que nous l'avons déjà fait, que l'hypothèse B du théorème 1 est satisfaite. Choissisons maintenant

$$\varphi(N) = \Psi(N)\, \psi(N)\, \chi(N) \tag{18}$$

et

$$\varkappa(n, \lambda) = 2^{\frac{n-\lambda}{p}(\gamma-a)}. \tag{19}$$

Par conséquent nous avons

$$K(N) = \underset{(2^\nu \leqq N)}{\text{maximum}} \left(1 + \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{\lambda-\nu}{p-1}(\gamma-a)}\right)^{p-1} < \left(1 + \sum_{\Lambda=0}^{\infty} \left(2^{-\frac{\gamma-a}{p-1}}\right)^{\Lambda}\right)^{p-1} = O(1),$$

pour $p > 1$. Ainsi $K(N) = O(1)$ pour $p \geqq 1$.

Or, considérons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\Phi(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n, \lambda)^p \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})\right) \varphi(2^n)^{-1},$$

et montrons sa convergence. D'après (18) et (19) on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\Phi^*(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{(n-\lambda)(\gamma-a)} \frac{\Psi(2^{\lambda-1})}{\Psi(2^n)} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi^*(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})\right) (\psi(2^n)\, \chi(2^n))^{-1}.$$

---

[11]) Voir aussi I. S. GÁL, A Theorem concerning diophantine approximations, Nw. Arch. Wisk. 23, 13—38 (1949).

Ici se trouve une démonstration d'un cas spécial du théorème 3 avec $\Psi(N) = N(\log\log N)^2$, qui utilise les mêmes idées que ceux du théorème 1.

Mais d'après l'hypothèse du théorème 4, on a

$$\frac{\Psi(2^{\lambda-1})}{\Psi(2^n)} \leqq 2^{(\lambda-n)(1+\gamma)}$$

pour $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. Il suffit donc de montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Phi^*(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{(\lambda-n)(1+\alpha)} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi^*(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}))\,(\psi(2^n)\,\chi(2^n))^{-1}$$

converge. En effet

$$(\Phi^*(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{(\lambda-n)(1+\alpha)} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi^*(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}))\,\psi(2^n)^{-1} \leqq 1,$$

par conséquent l'hypothèse B est vérifiée. Or, en utilisant le théorème 1 nous obtenons, d'après (18) et $K(N) = O(1)$, le résultat du théorème 4.

3. 4. Considérons encore le cas particulier du théorème 4 pour lequel $\Phi^*(M, N) \equiv 1$. Il résulte que

$$\Phi^*(0, 2^n) + \sum_{\lambda-1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{(\lambda-n)(1+\alpha)}\, \Phi^*(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}) =$$

$$= 1 + \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{(\lambda-n)\alpha} < 1 + \sum_{\Lambda=0}^{\infty} (2^{-\alpha})^{\Lambda} = c(\alpha),$$

où $c(\alpha)$ est indépendant de n. Ainsi nous pouvons choisir $\psi(N) = c(\alpha) = O(1)$, $\chi(N) = (\log N)^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, et nous obtenons le théorème suivant, qui a été annoncé dans le cas spécial $\Psi(N) = N^k$ $(k > 1)$ par l'un des auteurs [12]).

Théorème 5.
Supposons que

$$\int_S F(M, N; x)^p\, dx = O(\Psi(N))$$

uniformement dans $M = 0, 1, \ldots,$ *où* $\Psi(N)/N^{1+\gamma}$ $(\gamma > 0)$ *est une fonction non-décroissante, alors*

$$F(0, N; x) = o(\Psi(N)\,(\log N)^{1+\varepsilon})^{1/p}$$

presque partout dans S, *et pour tout* $\varepsilon > 0$.

3. 5. Nous voulons noter encore deux cas spéciaux, qui jouent un certain rôle dans les applications. Au point de vue de ces applications nous allons considérer seulement le cas

$$F(M, N; x) = |f_{M+1}(x) + f_{M+2}(x) + \ldots + f_{M+N}(x)|$$

où les fonctions $f_\nu(x)$ appartiennent à la classe L^2.

Tout d'abord un résultat, que M. Erdös et l'un des auteurs ont employé dans une autre publication. [13])

[12]) Voir [6]).

[13]) Erdös, P. et J. F. Koksma, On the uniform distribution modulo 1 of sequences $(f(n, \theta))$. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam **52**, 299—302 (1949).

Théorème 6.
Supposons que

$$\int_a^b |f_{M+1}(x)+f_{M+2}(x)+\ldots+f_{M+N}(x)|^2\,dx = O\,(N\,(\log N)^\sigma) \qquad (\sigma \geqq 0)$$

uniformement dans M, alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$|f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_N(x)| = o\,(N\,(\log N)^{3+\sigma+\varepsilon})^{1/2},$$

presque partout dans $a \leqslant x \leqslant b$. En effet, la fonction $\psi(N)/N = (\log N)^\sigma$ est non décroissante, donc d'après le théorème 3 on a

$$|f_1+f_2+\ldots+f_N| = o\,(N \log^\sigma N \log^{3+\varepsilon} N)^{1/2} = o\,(N \log^{\sigma+3+\varepsilon} N)^{1/2}.$$

Finalement voici un théorème, que M. Salem et l'un des auteurs ont utilisé dans un autre travail [14]).

Théorème 7. *Soit $f_n(x) \in L^p\,(0,1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $(p > 1)$ une suite de fonctions pour laquelle*

$$\int_0^1 \Big|\sum_{n=M+1}^{M+N} f_n(x)\Big|^p\,dx \leqslant C\,(M+N)^{p-\sigma} N^\sigma\,\eta(N) \tag{20}$$

où $C > 0$ et $\sigma > 1$ sont des constantes. La fonction $\eta(N) > 0$ est non-croissante et $\sum \eta(N)/N < \infty$. Alors on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n(x) = 0$$

presque partout dans $(0, 1)$.

Remarque: Nous pouvons supposer naturellement que $(1 <)\,\sigma \leqslant p$, parce que pour $\sigma > p$ nous obtenons $C(M+N)^{p-\sigma} N^\sigma \eta(N) \leqslant C N^p \eta(N)$, donc on peut remplacer dans (20) σ par la valeur p. De la même façon, on peut supposer que $\eta(N)\log^2 N$ est non-décroissante.

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème 4 en posant

$$F\,(M, N; x) = \Big|\sum_{n=M+1}^{M+N} f_n(x)\Big|\ , \quad \Psi(N) = N^{\frac{\sigma+1}{2}}$$

$$\Phi^*\,(M, N) = (M+N)^{p-\sigma} N^{\frac{\sigma-1}{2}}\,\eta(N)\ , \quad \gamma = \frac{\sigma-1}{4}.$$

Dans ce cas pour tout $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\sigma-1}{4}\right)$ nous avons

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi^*\,(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{(\lambda-n)(1+\alpha)} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi^*\,(2^n+\mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}) \leqslant \\ &\leqslant 2^{n\left(p-\frac{\sigma+1}{2}\right)}\eta(2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{(\lambda-n)(1+\alpha)} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} (2^n+(\mu_\lambda+1)\,2^\lambda)^{p-\sigma}\, 2^{\frac{(\sigma-1)(\lambda-1)}{2}}\,\eta(2^{\lambda-1}). \end{aligned}\right. \tag{21}$$

[14]) Koksma, J. F. et R. Salem, Uniform distribution and Lebesgue integration, Acta. Sci. Math. Szeged, 12B, 87—96 (1950).

La fonction $\eta(N) \log^2 N$ est non-décroissante, par conséquant

$$2^{\frac{(\sigma-1)(\lambda-1)}{2}} \eta(2^{\lambda-1}) \leqq 2^{\frac{(\sigma-1)n}{2}} \eta(2^n)$$

pour tout $\lambda \leqslant n$. D'après cette inégalité nous obtenons que le membre à droit de (21)

$$\leqq 2^{n\left(p-\frac{\sigma+1}{2}\right)} \eta(2^n) + 2^{p-\sigma} \cdot 2^{n(p-\sigma)} 2^{\frac{(\sigma-1)n}{2}} \eta(2^n) \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{(\lambda-n)\alpha} <$$

$$< 2^{p-\sigma} \cdot 2^{n\left(p-\frac{\sigma+1}{2}\right)} \eta(2^n) \left\{1 + \sum_{\Lambda=0}^{\infty} 2^{-\alpha\Lambda}\right\} < c\, 2^{n\left(p-\frac{\sigma+1}{2}\right)} \eta(2^n),$$

où la constante $c > 0$ ne dépend que de p, σ et α. Ainsi (16) est valable avec $\psi(N) = c N^{p-\frac{\sigma+1}{2}} \eta(N)$.

Posons maintenant $\chi(N) = \eta(N)^{-1}$ dans le résultat (17) et nous obtenons ainsi, que

$$F(0, N; x) = o(\Psi(N)\, \psi(N)\, \chi(N))^{1/p} = o\left(N^{\frac{\sigma+1}{2}} \cdot N^{p-\frac{\sigma+1}{2}} \eta(N)\, \eta(N)^{-1}\right)^{1/p} = o(N)$$

presque partout dans (0, 1).

§ 4. *Quelques remarques sur le théorème* 1.

4. 1. Dans ce dernier chapitre nous examinerons avec quel succès on peut appliquer le théorème 1 à des problèmes concrets. Finalement nous allons mentionner une possibilité naturelle de généralisation à laquelle nous reviendrons ailleurs.

Nous avons remarqué dans (1. 1) que l'ordre de grandeur obtenu par le théorème qui y figure et l'ordre de grandeur effectif de $F(0, N; x)$ peuvent différer beaucoup, à savoir par un facteur d'ordre $N^{1/p}$. Il est facile de construire un example où ce facteur est supérieur à une fonction $\Phi(N)$ arbitraire, donnée à l'avance. De ce point de vue notre théorème n'est pas meilleur. Soit en effet

$$f_n(x) = \begin{cases} (2^n \Phi(n)^p)^{1/p} & \text{si } 0 \leqq x \leqq 2^{-n}, \\ 0 & \text{si } 2^{-n} < x \leqq 1, \end{cases}$$

où $\Phi(N)$ est une fonction croissante tendant vers l'infini. Il est évident que $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_N(x) = O(1)$; $N \to \infty$ pour $0 < x \leqslant 1$. D'autre part en vertu de la definition

$$\int_0^1 |f_{M+1} + \cdots + f_{M+N}|^p\, dx \geqslant \int_0^{2^{-(M+N)}} 2^{M+N}\, \Phi(M+N)^p\, dx \geqq \Phi(N)^p,$$

donc le théorème 1 ne peut donner qu'un résultat moins fort que $o[\Phi(N) (\log N)^{1/p}]$.

Mais en comparaison avec le théorème qui figure dans (1. 1), le théorème 1 est plus fort, car dans l'exemple précédent (1. 1) ne donne que l'estimation $O[\Phi(N)\, N^{1/p}]$. C'est d'ailleurs la situation générale: les résultats obtenus à partir du théorème dans (1. 1) et ceux obtenus à partir du théorème 1 diffèrent par un facteur $N^{1/p}(\log N)^{-\delta}$ $(0 < \delta < 2)$.

4. 2. Pour que le résultat obtenu à partir du théorème 1 approche bien l'ordre de grandeur effectif de $F(0, N; x)$, il faut que cet ordre de grandeur soit atteint "assez uniformément" dans $x \in S$. Pour certains problèmes ceci est satisfait, on peut montrer cependant un exemple très simple où ce n'est pas le cas:

Soit

$$F(M, N; x) = \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} e^{2\pi i h n x} \right|,$$

où h $(h = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ est un nombre fixe. Nous obtenons

$$\int_0^1 F(M, N; x)^2 \, dx = \int_0^1 \left(\sum_{n_1=M+1}^{M+N} e^{2\pi i h n_1 x} \right) \left(\sum_{n_2=M+1}^{M+N} e^{-2\pi i h n_2 x} \right) dx = N.$$

En choisissant $p = 2$ dans le théorème 3, on obtient $F(0, N; x) = o(N \log^{3+\varepsilon} N)^{1/2}$ presque partout. D'autre part la sommation directe de $F(0, N; x)$, en tant que progréssion géométrique, fournit le résultat connu

$$F(0, N; x) \leqq \frac{2}{|\sin \pi h x|} = O(1)$$

pour tout nombre irrationel x.

4. 3. Nous voulons donner encore un exemple en connexion avec le théorème 1 concernant le cas $\Phi(M, N) = 1$. Dans ce cas on pourrait penser que $F(0, N; x) = O(1)$ et que le théorème 1 fournirait au moins le résultat $F(0, N; x) = o(\log N)^2$. La situation est cependant complètement différente, comme le montre l'exemple suivant dû à M. P. Erdös:

Soit $p > 1$ et posons $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + 1/n$ $(n \geqslant 1)$; $a_n = s_n - [s_n]$, $b_n = s_{n+1} - [s_{n+1}]$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Si $a_n < b_n$, soit I_n l'intervalle $a_n \leqslant x < b_n$. Si au contraire $a_n > b_n$, désignons par I_n la réunion des intervalles $0 \leqslant x < b_n$, $a_n \leqslant x < 1$. Ainsi tout x de $(0, 1)$ appartient à une infinité d'ensembles I_n. Définissons dans $0 \leqslant x < 1$ les fonctions $f_n(x)$ de la manière suivante:

$$f_1(x) = 1$$

$$f_{2m+1}(x) = \begin{cases} (m+1)^{1/p} & \text{dans } I_m, \\ 0 & \text{pour les autres valeurs de } x; \end{cases}$$

et

$$f_{2m}(x) = -f_{2m-1}(x)$$

pour $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Ainsi nous avons $\int_0^1 |f_n(x)|^p \, dx = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et

$$F(M, N; x) = \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} f_n(x) \right| \leqslant |f_{M+1}(x)| + |f_{M+N}(x)|.$$

Par conséquent d'après l'inégalité de HÖLDER nous obtenons

$$F(M, N; x)^p \leqq 2^{p-1} (|f_{M+1}(x)|^p + |f_{M+N}(x)|^p)$$

donc

$$\int_0^1 F(M, N; x)^p\,dx \leqq 2^{p-1} \{\int_0^1 |f_{M+1}(x)|^p dx + \int_0^1 |f_{M+N}(x)|^p\,dx\} = 2^p$$

D'autre part, on a pour N impair $F(0, N; x) = f_N(x)$ c'est à dire que pour tout x il y a une infinité de valeurs de N telles que

$$F(0, N; x) > 2^{-p} N^{1/p}. \tag{22}$$

En utilisant le théorème 2 avec

$$\Psi(N) = N,\ \Phi^*(M, N) = cN^{-1},\ \psi(N) = O(1) \text{ et } \chi(N) = \log^{1+\varepsilon} N$$

on trouve que

$$F(0, N, x) = o\,(N \log^{p+\varepsilon} N)^{1/p}$$

presque partout dans (0, 1). Cette estimation sans connaître l'inégalité (22) pourrait sembler être un mauvais résultat.

4. 4. Il y a naturellement des cas où le théorème 1 donne des bornes de l'ordre $O(\log N)^\delta$ $(0 \leqslant \delta)$ pour la function $F(0, N; x)$. Tel est le cas classique de MENCHOFF-RADEMACHER, où

$$F(M, N; x) = \sum_{n=M+1}^{M+N} c_n \varphi_n(x),\ \sum c_n^2 \log^2 n < \infty, \int_0^1 \varphi_m \varphi_n = 0 \text{ et } \int_0^1 \varphi_n^2 = 1.$$

Pour mentionner un autre cas, soit par exemple

$$\int_0^1 F(M, N; x)^2\,dx \leqq \Phi(M, N)$$

où

$$\Phi(M, N) \leqq \begin{cases} c \text{ pour } M = 0,\ N \geqslant 1 \\ c/M \text{ pour } M \geqslant 1,\ 1 \leqslant N < M. \end{cases}$$

Dans ce cas on peut utiliser le théorème 1 avec

$$\varkappa(n, \lambda) = 1,\ K(N) = O(\log N) \quad \text{et} \quad \varphi(N) = (\log N)^{1+\varepsilon}.$$

Montrons que B est valable. En effet

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Phi(0, 2^n) + \sum_{\lambda=1}^{n} \varkappa(n, \lambda)^p \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \Phi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}))\,\varphi(2^n)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{n=1}^{\infty} (\log 2^n)^{-1-\varepsilon} + c \sum_{n=1}^{\infty} (\log 2^n)^{-1-\varepsilon} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} (2^n + \mu_\lambda 2^\lambda)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(\log 2)^{1+\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} + \frac{c}{(\log 2)^{1+\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{-\lambda} < \infty.$$

Donc on a presque partout $F(0, N; x) = o\,(\log^{2+\varepsilon} N)$.

4. 5. Dans notre note [5]) nous avons annoncé le théorème 1 dans une forme plus générale mais plus compliquée. Au lieu d'un développement dyadique nous avons utilisé un développement analogue en remplaçant la fonction 2^n une fois par une fonction croissante $\Omega(n)$ et l'autre fois par une pareille fonction $\psi(n)$. Parce que nous n'avons pas rencontré un exemple où l'introduction des développements nommés est absolument nécessaire, nous avons préféré de ne pas compliquer l'exposé et nous avons décidé de publier ici le théorème dans la forme du théorème 1 ci dessus. [15])

Au lieu de cette généralisation il est beaucoup plus intéressant de considérer la forme à "plusieurs paramètres" du théorème: au lieu de la suite $f_n(x)$ on considère $f_{n_1, n_2}(x)$ $(n_1, n_2 = 1, 2, \ldots)$ et la somme

$$F(M_1, N_1, M_2, N_2; x) = \left| \sum_{n_1=M_1+1}^{M_1+N_1} \sum_{n_2=M_2+1}^{M_2+N_2} f_{n_1, n_2}(x) \right|.$$

L'étude même n'apporte aucune nouvelle difficulté, il faut seulement utiliser l'inégalité de Hölder deux fois de suite. On peut envisager plus généralement certaines fonctions $F(M_1, N_1, \ldots, M_k, N_k; x)$. Une classe de ces fonctions fournit des renseignements sur la discrépance de la répartition modulo 1. Nous reviendrons cependant à ce problème à un autre endroit.

---

[15]) La dernière formule à page 1322 de la note [5]) il faut lire comme suit:

$$\Lambda_k(K) = \sum_{\substack{K_\lambda \in T_\lambda \\ K_\lambda \text{ corresp. à } K}} \left\{ \frac{\phi(0, \Psi'(k)+K_\lambda)^{1/p}\, \varphi(\Psi'(k)+K_\lambda)}{\phi(0, \Psi'(k)+K)^{1/p}\, \varphi(\Psi'(k)+K)} \right\}^{\frac{p}{p-1}}.$$