

PHYSICS

RELATIVITÉ ET STATISTIQUE

PAR

ANDRÉ MERCIER

(Communicated by Prof. J. CLAY at the meeting of Dec. 17, 1949)

Resumé.

Le présent travail, de nature épistémologique et méthodologique, a pour but de montrer, par une analyse des théories existantes, que l'effort de généralisation de la mécanique classique basé sur la relativité (dans le but d'obtenir une véritable dynamique et non seulement un cadre cinématique relativiste pour une dynamique), tout comme l'effort de généralisation de la même mécanique basé sur la canonicité, fournissent deux procédés de quantification. Dans le titre du travail, il faut comprendre plus spécialement ce qu'il y a de canonique dans la statistique. Or, du fait généralement ignoré que le procédé canonique est lié à une exigence d'ordre statistique à l'endroit des cellules nécessairement finies de l'espace de phase (BOLTZMANN-EHRENFEST), on peut soupçonner une double origine, relativiste ou statistique, du quantique. Les deux principes correspondants auraient alors quelque chose de commun (que l'on trouve au niveau très élevé du principe philosophique d'absence de raison suffisante), et leur superposition dans le calcul d'une prévision physique ne va pas sans danger.

1. *Relativité et canonicité, caractères des deux adaptations de la mécanique à la description des phénomènes d'électricité atomiques.*

La mécanique ne se prêtant pas à la description correcte des phénomènes électriques, on a cherché à l'y adapter. De cette recherche sont nées deux théories; l'une, théorie de la relativité restreinte, s'appuie sur le caractère de relativité de la mécanique en en modifiant la description formelle (abandon des transformations de GALILÉE au profit de celles de LORENTZ; l'autre, théorie des quanta, s'appuie sur son caractère de canonicité en en modifiant l'applicabilité (substitution de l'algèbre opératorielle ou matricielle à l'algèbre ordinaire).

Cependant la théorie de la relativité restreinte n'est pas en soi une mécanique complète, parce qu'elle n'emploie la notion correspondant à celle de force que d'une manière boiteuse, et pour la compléter, il fallait introduire l'essence dynamique manquante. Suivant EINSTEIN, ce qui avait été perdu était l'action particulière pour la description unique de laquelle NEWTON avait créé la mécanique, à savoir la gravitation. On sait comment EINSTEIN rétablit celle-ci, créant une nouvelle cosmologie. La théorie de relativité générale est souvent présentée comme un

prolongement nécessaire de la relativité restreinte, la raison se trouvant dans la tensorialité riemannienne. Cependant la mécanique non relativiste est déjà maîtrisée par le tenseur, mais par le tenseur cartésien seulement; personne n'a estimé devoir généraliser cette mécanique qui opère avec un seul temps; en réalité, le désir de rétablir la gravitation a joué un rôle décisif dans l'établissement d'une relativité généralisée.

Dans les tentatives d'unification des théories quantique et relativiste, seul le désir de réaliser la variance lorentzienne correcte a joué un rôle sérieux. Il est pour le moment tout à fait justifié de faire abstraction d'une intégration de la gravitation dans la théorie des particules et atomes, ne serait-ce que pour la raison pratique de l'infinie petitesse de l'interaction gravifique comparée aux interactions électrique ou nucléaire.

Le problème est entièrement celui d'une théorie quantique et relativiste restreinte. Quelles sont, à part la quantification elle-même avec la dualité et l'incertitude ou la transformation de LORENTZ elle-même, les innovations spécifiques qui ont été apportées par la théorie des quanta et par la relativité restreinte? (Et par spécifique, entendons: qui détermine l'intensité des phénomènes plus que leur forme). Du côté de la relativité, c'est l'équivalence de masse et énergie ainsi que le dédoublement de principe en énergies positives et négatives. De celui des quanta c'est l'interaction d'échange. Le spin, lui, nous apparaît actuellement comme le résultat d'une composition du quantique et du relativiste. Il est vrai qu'à l'époque de la découverte d'UHLENBECK et GOUDSMIT on avait trouvé le spin en vertu du désir de respecter la conservation du moment de rotation, mais c'est là déjà une certaine combinaison du quantique avec une relativité provisoire, et à ce niveau, on ne pouvait pas démontrer la conservation, il fallait l'admettre. Par contre, au niveau des transformations de LORENTZ, le spin a surgi de lui-même de la composition du quantique et du relativiste. Il n'est cependant pas démontré que seule cette composition puisse le faire apparaître.

Bien que théorie de relativité et théorie des quanta soient, séparément, bonnes et satisfaisantes, leur composition nous met en présence d'antinomies qu'on cherche à soulever par des artifices plus ou moins cachés (que les plus astucieux se plaisent à découvrir), si bien qu'en fin de compte les antinomies persistent toujours. Dans cette composition néanmoins, le spin qui en surgit n'est pas un artifice, c'est une propriété des corpuscules appelée probablement à jouer un rôle décisif dans toutes les théories à venir. C'est lui qui décide des statistiques particulières et peut-être aussi de la distinction des particules élémentaires de celles qui ne le sont pas. De plus, les spineurs ont montré que tout ne s'arrête pas à la notion de tenseur d'ordre entier, si bien que le problème de la généralisation de la relativité a été repoussé à un autre horizon.

Ce qui importe tout spécialement dans l'électrodynamique, c'est le champ électromagnétique. Or ce dernier n'est pas véritablement incorporé

à la mécanique par le seul fait qu'on a relativisé la mécanique. Comme la partie statique du champ n'a pas d'intérêt théorique ici, on peut en vertu des équations de MAXWELL (et de la condition de LORENTZ) se borner à considérer le champ comme une propagation d'ondes, à propos de laquelle l'introduction du vecteur d'onde d'espace-temps (κ, ν) s'impose. Il fallait en faire des systèmes mécaniques, qu'EINSTEIN a découverts et décrits, les photons. La cinématique relativiste ayant fait également de (p, E) un vecteur (dont les composantes portent les propriétés de nature dynamique au sens de la mécanique employée jusqu'alors) L. DE BROGLIE a compris qu'il faut également identifier ces deux vecteurs par l'intermédiaire de la constante de PLANCK à propos des particules possédant une masse au repos non nulle, donc dans tous les cas. Donc le photon comme l'onde-corpuscule sont du ressort direct de la relativité. Tel est, sur la base relativiste des exigences posées par l'électricité, l'acte de création d'une mécanique au plein sens du mot. La mécanique classique ne requiert rien de pareil. Elle n'empêche pas qu'on essaie de le faire, et on sait que NEWTON avait déjà tenté de construire des corpuscules lumineux, sans succès d'ailleurs parce qu'il ne parvenait pas à bien décire la réfraction. Mais *ce* qu'il faisait (par opposition à la *manière* dont il le faisait) ne lui était pas dicté par sa mécanique, en particulier pas par la relativité galiléenne à laquelle il se référait, tandis que du moment où l'on se pose le problème de réaliser une dynamique de la lumière dans l'acceptation de la relativité lorentzienne, le photon et l'onde-corpuscule s'imposent.

Au moment où ces découvertes ont été faites et au milieu du développement de la physique proprement dite, les choses pouvaient ne pas paraître si simples; maintenant que nous y revenons avec la curiosité de l'épistémologiste, leur nécessité nous apparaît saisissante. Et nous pouvons résumer en disant qu'il est de ce point de vue nécessaire qu'une dynamique relativiste prenne la forme d'une mécanique ondulatoire. Plus d'un savant s'est étonné que L. DE BROGLIE ait établi les ondes de matière par une méthode relativiste, alors que la mécanique ondulatoire qui a suivi n'est pas relativiste. Les explications données ici fourniront la réponse.

Quant à l'équation de SCHRÖDINGER, établie apparemment dans l'oubli de la base relativiste que devrait avoir une mécanique ondulatoire logiquement correcte, elle fournit simplement une description non relativiste parce que le formalisme de la mécanique dont elle est issue constitue lui-même une théorie non-relativiste. Mais la question n'est pas ici d'obtenir une équation (du type SCHRÖDINGER) de variance relativiste par un procédé en dehors de la relativité. Nous pensons qu'on ne devrait pas chercher à la fois dans la relativité et dans la canonicité le germe d'une nouvelle mécanique. Apparemment, SCHRÖDINGER l'a cherché dans la canonicité parce que, comme il l'a fait lui-même, son

équation semble établie à partir de celle d'HAMILTON-JACOBI. Mais le procédé iconal invoqué dans les raisonnements est en réalité issu de l'optique ondulatoire, c'est à dire d'une théorie relevant entièrement de la relativité. D'ailleurs on y pose la fonction ψ proportionnelle à l'exponentielle

$$e^{\frac{i}{\hbar} (\int \Sigma p_x dx - \int H dt)}$$

ce qui constitue aussi une soumission à la relativité.

Ce qu'il y a de canonique dans la dynamique analytique influe bien entendu d'une manière précise sur la mécanique ondulatoire, et parce que cette dernière se borne à être une approximation non-relativiste, c'est la canonicité qui lui décerne le pouvoir de la quantification. Ce déplacement d'influence du relativiste au canonique est une chose singulière qui donne à la mécanique ondulatoire une souplesse d'analyse que ne possède pas la mécanique des matrices qui a dû en chercher une compensation dans la seconde quantification et la théorie quantique des champs. Il est vrai qu'en l'absence de cette souplesse, la mécanique des matrices s'est tracé un chemin admirable pour réaliser le passage du classique au quantique grâce à un énoncé tout à fait précis du principe de correspondance qui n'existe pas, — au moins au sens de BOHR, — dans l'établissement de la mécanique ondulatoire de SCHRÖDINGER. Il serait désirable de pouvoir établir une dynamique relativiste des ondes-corpuscules sans s'appuyer essentiellement sur un procédé canonique. Même dans la théorie quantique des champs où l'on introduit, si possible, une densité lagrangienne relativiste, le procédé qui mène à la quantification est d'origine purement canonique. L. DE BROGLIE par contre ne procède précisément pas ainsi dans la théorie qu'il élabore depuis plus de dix ans; au contraire il procède selon l'esprit même d'une théorie ondulatoire qui s'oppose à une quantification du type canonique menant à la théorie des champs. ¹⁾ Nous tenons pour correct aussi bien le procédé qui se fonde sur la relativité que celui qui part de la canonicité, mais leur confusion pour l'origine d'antinomies ou tout au moins de désaccords fâcheux.

En résumé, malgré la substitution d'un procédé fondé sur la canonicité, il reste que la mécanique ondulatoire est le résultat d'un effort d'adapter la mécanique à la description des phénomènes atomiques par l'application du postulat de relativité, du fait que la fonction ψ de SCHRÖDINGER est le symbole d'ondes-corpuscules qui sont nécessairement du ressort de la relativité.

L'autre modification apportée à la mécanique, celle qui a amené à la mécanique quantique des matrices, ne se fonde en aucune manière

¹⁾ Ces lignes ont été écrites avant qu'ait paru l'article de L. DE BROGLIE dans le volume jubilaire d'ALBERT EINSTEIN (Review of Modern Physics, 21, 345, (1949)).

sur un postulat de relativité, par contre elle suit un chemin clairement tracé par la correspondance.

L'exemple des relations d'incertitude illustrera la distinction d'appartenance des deux théories. L'incertitude $\Delta p \Delta q \approx \hbar$ est une conséquence de la canonicité; si la mécanique modifiée à partir de la canonicité était en même temps le fait d'une exigence relativiste, on devrait trouver une incertitude $\Delta E \Delta t \approx \hbar$. Or il n'en est rien, on ne peut pas établir $\Delta E \Delta t \approx \hbar$ au moyen du formalisme canonique, car il faudrait pour cela que l'énergie et le temps aient un commutateur non nul, et alors, en vertu d'un théorème de DIRAC²⁾, l'énergie et le temps auraient des spectres continus, ce qui serait en contradiction avec l'expérience. D'ailleurs, déjà en mécanique non quantique, le formalisme canonique ne peut pas donner lieu à la relation de réciprocité relativiste entre le temps et l'énergie, comme le montre une analyse rigoureuse.³⁾

2. Les postulats de relativité et de statistique.

L'isomorphie de la mécanique ondulatoire et de la mécanique quantique est connue. Comment se fait-il qu'on arrive à deux théories isomorphes en se fondant sur deux caractères de la mécanique qui semblent, au premier abord du moins, n'avoir rien de commun? Il est peut-être important de rappeler que les deux théories, si elles sont isomorphes, ne sont pas identiques; on ne peut les unifier sans l'aide d'une opération singulière (fonction delta, J. VON NEUMANN).

Aux issues qui ouvrent le passage des conceptions classiques vers ces deux théories, on trouve soit la dualité onde-corpuscule comme idée maîtresse, soit le quantum d'action en tant que mesure minimum des cellules de l'espace de phase. Mais d'un côté la dualité n'est rien sans l'exigence relativiste qui est à sa base: NEWTON avait déjà tenté la construction d'ondes-corpuscules sans parvenir cependant à décrire correctement la réfraction; ce n'est qu'en postulant les transformations de LORENTZ au lieu de celles de GALILÉE qu'on fait suivre aux photons le chemin réel des rayons lumineux. Dans ce fait, il faut voir d'ailleurs une justification aussi remarquable des transformations de LORENTZ que celle qui a donné raison à la formule relativiste de variation de la masse sur celle du modèle d'ABRAHAM. Ici, comme dans l'application des équations de MAXWELL, les transformations de LORENTZ ont l'avantage décisif sur celles de GALILÉE; cet avantage ressort d'expériences directes. Par contre, dans le fait que l'hypothèse des transformations de LORENTZ (ou si l'on veut la soumission des équations de MAXWELL à la covariance⁴⁾)

²⁾ P. A. M. DIRAC, Les principes de la mécanique quantique, (trad. française, Paris, 63, (1931)).

³⁾ A. MERCIER et E. KEBERLE, Archives des Sciences, 2, 186, (1949).

⁴⁾ Nous nous proposons de publier un mémoire sur les fondements de l'électrodynamique, dans lequel la théorie de la relativité restreinte n'apparaîtra pas, au contraire de l'habitude, comme fondée sur le postulat de l'équivalence des systèmes

conduit nécessairement à la dualité quand elle est imposée à la mécanique, ⁵⁾ il n'y a plus rien qui permette de justifier le choix de ces transformations parmi d'autres; admettre leur justesse est un a priori qui donne le ton à la théorie consécutive. Si donc on parle de ce acte comme d'un postulat de relativité, ce postulat devient fondamental par son caractère de priorité.

D'un autre côté, on dit facilement que c'est la théorie des quanta qui a attribué une extension finie aux cellules de l'espace de phase. ⁶⁾ Cependant, il est possible d'invoquer à cette fin la statistique elle-même. ⁷⁾ Cela est d'une grande importance, puisqu'il en découle que la nécessité d'une quantification dans le cadre du formalisme canonique est liée à l'exigence d'une interprétation mécanique (statistique) de la thermodynamique. ⁸⁾ Là de nouveau, l'idée, maîtresse de la statistique n'est pas soumissible à un contrôle expérimental. Cette idée réside dans la dénombrabilité, notion a priori qui, précisée par BOLTZMANN et les grands statisticiens, est peut-être l'expression seule actuellement correcte de l'atomisme. ⁹⁾ La proposition de la statistique qu'on adopte alors sur la base de cette dénombrabilité étant qu'à des cellules égales correspondent des probabilités égales, elle a le même caractère d'a priori que celle qui, ailleurs, faisait adopter les transformations de LORENTZ. Elle constitue un postulat de statistique ayant même priorité que celui de relativité.

Il est alors concevable qu'on en vienne à admettre, comme le fait KEBERLE (loc. cit.) une appartenance initiale ou d'ordre supérieur commune à ces deux postulats.

Avant d'en venir là, préparons les explications finales par quelques remarques.

3. *Remarques.*

Tout d'abord, selon qu'on considère la mécanique des matrices ou la mécanique ondulatoire, on a le cas des relations d'incertitude ou celui de la dualité. Mais la complémentarité n'a lieu qu'en vertu de l'effort

galiléens combinée à l'universalité de la vitesse de la lumière, mais sur la covariance des équations de MAXWELL et sur l'hypothèse presque évidente que la constante d'influence électrique (ou constante diélectrique du vide) ϵ_0 est une constante universelle.

⁵⁾ Cette nécessité que nous avons expliquée plus haut, ne semble pas avoir été reconnue pleinement jusqu'ici.

⁶⁾ Au hasard des ouvrages, citons Saha et Srivastava, *A textbook of Heat* (Allahabad, 649, (1931)).

⁷⁾ Voir P. et T. EHRENFEST, *Enzyklop. der math. Wissenschaften*, IV, 4, note 110 au bas de la page 36.

⁸⁾ Pour la démonstration, voir E. KEBERLE, Thèse de doctorat (Berne 1948).

⁹⁾ On pourrait objecter que la seconde quantification fournit de fait la notion de particule, et que c'est elle qui, par là, donne l'expression de l'atomisme. Cependant, il n'y a pas de seconde quantification sans la première, qui elle-même vient d'être ramenée à l'exigence de dénombrabilité de la statistique.

d'adapter les interprétations historiques (classiques, non-quantiques...) aux exigences d'une théorie quantique nouvelle: d'une part la description spatio-temporelle qui est l'essence d'une relativité, d'autre part la description canonique qui est celle d'une évolution où le temps est seule variable indépendante.

Ensuite, nous avons des raisons pour dire que la mécanique ondulatoire, bien qu'issue historiquement de l'équation d'HAMILTON-JACOBI, n'a pas été créée à partir de la mécanique analytique en tant que formalisme canonique uniquement sans qu'un certain effort de relativisation ¹⁰⁾ soit de la partie. On ne le voit pas dans les procédés ordinairement exposés qui partent de l'équation d'HAMILTON-JACOBI ou autre employant l'action, parce que c'est justement un procédé de ce genre qui laisse à désirer au point de vue formel (formel: par opposition au procédé iconal du passage de l'ondulatoire au géométrique). Nous avons montré récemment ¹¹⁾ que l'équation de SCHRÖDINGER est une traduction de ce qu'on appelle la condition accessoire du formalisme canonique homogénéisé et non pas celle de l'équation d'HAMILTON. Or l'homogénéisation est une tentative du genre relativiste, ce qui ne veut pas dire qu'elle satisfasse aux exigences formulées d'une manière précise dans la transformation de LORENTZ. ¹²⁾ Elle n'y satisfait pas puisque même pour un seul corpuscule, énergie et temps ne sont pas canoniquement conjugués (compte tenu du signe —). Aussi ne peut-on s'empêcher de voir là une certaine incompatibilité entre relativité et canonicité. Il faut entendre par là qu'on ne peut sans danger, peut-être même sans contradiction, imposer à la fois des conditions relevant d'une part de la canonicité, de l'autre de la relativité; les premières conduisent à énoncer un postulat d'ordre statistique par l'invariance adiabatique qu'elles impliquent, les autres relèvent de la géométrie d'un espace-temps ou coordonnées et temps sont unifiés, elles doivent mener à un postulat qui, s'il implique une invariance, ne peut le faire que dans ledit espace-temps.

Enfin, on remarque dans le cas de la relativité que si tous les systèmes de référence se trouvent également justifiés, on ne peut faire autrement que de s'en référer à l'un d'eux, quel qu'il soit d'ailleurs. Dans le cas de la statistique, on remarque quelque chose de comparable, mais qui s'exprime de façon opposée: Ce qui, dans la mécanique, prépare la statistique, c'est en connexion avec la canonicité, l'existence de la propriété très générale d'invariance adiabatique; là-dessus repose la possibilité de postuler l'égalité des probabilités des cellules de phases

¹⁰⁾ Effort toutefois distinct de celui de la relativité lorentzienne.

¹¹⁾ Pour paraître dans les Archives des Sciences.

¹²⁾ Cela n'est d'ailleurs pas en contradiction avec le fait qu'une transformation de Lorentz peut être considérée comme une transformation canonique.

H. KRAMERS a déjà eu l'idée d'un passage de la condition accessoire à l'équation de SCHRÖDINGER, sans en tirer cependant toutes les conséquences (Grundlagen der Quantentheorie, Leipzig 1938, § 17).

égales. Pour pouvoir parler des cellules, il faut qu'elles soient finies, et la quantification en découle en principe. Mais, on doit toujours considérer l'ensemble des cellules (par opposition à l'un des systèmes de référence cités plus haut), et les propriétés sont attribuées à chacune d'entre elles.

Autrement dit: C'est aux idées de relativité et de statistique qu'on peut en fin de compte attribuer l'apparition des nouvelles théories, et la mécanique classique contenait déjà les germes des deux tendances dans la description géométrique et dans la description canonique. En poussant à l'extrême les exigences du type géométrique, on court le risque d'y perdre la canonicité, et en donnant à l'espace de phase qui repose sur la canonicité la signification si puissante de la statistique, on risque de devoir renoncer à toute implication spatio-temporelle.

Nous pouvons alors résumer, préciser et conclure comme suit.

4. *La double origine de la quantification.*

a) Le postulat de relativité offre la possibilité d'une attribution mutuelle onde-corpuscule, et lorsqu'on l'applique à une description dynamique des phénomènes électriques atomiques, ce postulat a pour conséquence la dualité de L. DE BROGLIE.

Cette attribution mutuelle entraîne la quantification aussitôt qu'il s'agit non pas d'ondes-corpuscules totalement libres mais d'ondes-corpuscules avec couplage (par exemple dans une enceinte de paroi intérieure réfléchissante). Et comme il n'y a pas d'onde-corpuscule totalement libre, on peut dire avoir trouvé un premier procédé, celui qui mène de la relativité à la quantification.

b) Le postulat de statistique qui attribue la même probabilité à des cellules d'égale extension dans l'espace de phase, n'a de sens que si ces cellules sont d'extension finie, si petites soient-elles. Cette dernière phrase („si petites soient-elles") ne peut pas être comprise au sens du passage à la limite ou le discontinu se confond en un continu: En appliquant le postulat de statistique au sens d'un dénombrement continu, on ferait un non-sens (comme si on voulait construire une roue dentée ayant une infinité non-dénombrable de dents, ce qui excluerait la transmission même par frottement). L'idée-même de statistique et en particulier la possibilité des cellules d'égale extension est liée au dénombrement (malgré l'impossibilité de fixer exactement les propriétés des éléments à dénombrer). En d'autres termes, le formalisme statistique entraîne de son côté la quantification de principe. Et puisque, grâce aux invariants adiabatiques, la mécanique fournit les éléments d'une base de la thermodynamique (existence de l'entropie), puisque le formalisme statistique est dès lors non seulement suggéré par le formalisme canonique mais en est comme la continuation naturelle, il y a lieu de dire que la quantification est une conséquence (médiante) du formalisme canonique.

Tel est le second procédé, celui qui mène de la canonicité à la quantification.

c) Pour expliquer qu'on puisse, par deux procédés, atteindre à la quantification, rien n'est plus naturel d'admettre que les deux points de départ ont quelque chose de commun qui les rend apparentés. Jusqu'à ce jour, le postulat de relativité et celui de statistique étaient (en dehors du domaine des considérations d'ordre cosmologique dont nous avons fait abstraction), ce qu'il y avait de plus profond dans la construction des théories physiques.

Postulons à un ordre supérieur une parenté des deux postulats. En ce faisant, on explique qu'on puisse en particulier obtenir une théorie des quanta par deux procédés. Mais on ne justifie pas l'application simultanée du postulat de relativité et de celui de statistique; au contraire, il apparaît douteux qu'on puisse avec fruit en faire, à un seul et même objet, l'application simultanée; nous avons de fortes raisons pour le croire; ainsi s'expliquerait l'espèce d'incompatibilité que nous avons relevée entre relativité et canonicité. Il y a plus, on s'explique l'apparition de graves difficultés dans les théories physiques modernes.

C'est une alternative avec exclusion que nous présentent les deux postulats. Ils sont apparentés mais distincts; chacun livre, à sa manière, une théorie.

La question se pose de savoir en quoi réside leur parenté. La réponse se trouve dans le manque de raison suffisante d'en admettre d'autres.¹³⁾ En effet: d'une part (relativité) tous les systèmes de référence sont équivalents dans la référence qu'ils permettent de faire, d'autre part (statistique) toutes les cellules de phase d'égale extension sont équivalentes dans les probabilités qu'on leur attache, — cela, parce qu'il n'y a aucune raison qu'il n'en soit pas ainsi. La différence réside dans le fait que de tous les systèmes de référence, un seul importe dans la description (donc un seul d'entre eux prend à sa charge ce que tous sont censés faire), tandis que c'est toujours l'ensemble des cellules de phase qui domine (chaque cellule abandonne son individualité aux exigences de l'ensemble).

¹³⁾ Voir E. KEBERLE, loc. cit. Il est extrêmement intéressant de voir quel rôle peut jouer un principe philosophique tel que celui de raison suffisante dans le domaine si réel des théories physiques.