FORMALISTISCHE BETRACHTUNGEN ÜBER INTUITIONISTISCHE UND VERWANDTE LOGISCHE SYSTEME III

VON

J. RIDDER

(Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER at the meeting of April 29, 1950)

,,Logistische'' Kalküle im Sinne von GENTZEN für A_1, A_2, A_1^* und A_2^*.

§ 17. In diesem Par. beschränken wir uns auf die Betrachtung der Aussagenlogik A_1 (§ 1).

Definition. *Eine Sequenz* $\mathfrak{A}_1.\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}$ (μ eine ganze Zahl $\geqq 1$) ist eine andere Schreibweise des Satzes $(\ldots(((\mathfrak{A}_1.\mathfrak{A}_2).\mathfrak{A}_3).\mathfrak{A}_4)\ldots \ldots\mathfrak{A}_\mu) \subset \mathfrak{B}$; insbes. ist $\nu \to \mathfrak{B}$ eine andere Schreibweise für das Theorem $\nu \subset \mathfrak{B}$.[12])

Aus dieser Definition geht hervor, dasz hier, in Abweichung von GENTZEN, loc. cit. 8), Antezedens $\mathfrak{A}_1.\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_\mu$ und Sukzedens $\mathfrak{B}$ beide immer nicht leer sind.

Aus den Sätzen 1, 2, 4—7, Einsetzungsregel E, Axiom 2^α und die Schemata 1^β, 2^β lassen sich die folgenden GENTZENschen Schluszschemata ableiten:

Schema A_1. Verdünnung im Antezedens: $\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{D}.\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}$;

Schema A_2. Zusammenziehung im Antezedens: $\dfrac{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}.\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{D}.\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}$;

($\mathfrak{A}$ darf fehlen)

Schema A_3. Vertauschung im Antezedens: $\dfrac{\mathfrak{A}.\mathfrak{D}.\mathfrak{E}.\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}}$;

($\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}$ oder beide dürfen fehlen)

Schema A_4. Schnitt: $\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B}.\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}}{\mathfrak{A}.\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}}$.

($\mathfrak{C}$ darf fehlen)

Eine unmittelbare Folgerung von Axiom 1^α und Einsetzungsregel E ist das

Schema P. $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ (Ersetzung von $\mathfrak{D}$ durch eine willkürlich gewählte Formel liefert einen Satz).

Das Schema 2^β liefert das

Schema *UES*. $\dfrac{\mathfrak{D} \to \mathfrak{A} \quad \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{D} \to (\mathfrak{A}.\mathfrak{B})}$ (,,Und''-Einführung im Sukzedens).

Axiom 2^{α}, Regel E und die Schemata 1^{β}, 2^{β} liefern das

Schema *UEA*. $\dfrac{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}}{(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}}\quad\dfrac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}}{(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}}$ („Und"-Einführung im Antezedens).

($\mathfrak{D}$ darf fehlen)

Satz 6, Regel E, Schema 1^{β} und Ersetzungsschema E_0 liefern:

Schema *FES*. $\dfrac{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\to(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{C})}$ („Folge"-Einführung im Sukzedens).

Schema *FEA*. $\dfrac{\mathfrak{D}\to\mathfrak{A}\quad\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{E}\to\mathfrak{C}}{(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{E}\to\mathfrak{C}}$ („Folge"-Einführung im Antezedens).

($\mathfrak{E}$ darf fehlen)

Beweis. $\mathfrak{D}\subset\mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{B}.\mathfrak{E})\subset\mathfrak{C}$; (Ax. 1^{α}, Regeln E, E_0, Satz 6, Sch. 1^{β}) $[\mathfrak{A}.(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})]\subset\mathfrak{B}$; ($2^{\alpha}$, E, 1^{β}, 2^{β}) $[\mathfrak{D}.(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})]\subset\mathfrak{B}$; ($2^{\alpha}$, 1^{β}, E, 2^{β}) $\{[\mathfrak{D}.(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})].\mathfrak{E}\}\subset\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}.(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}).\mathfrak{E}\to\mathfrak{C}$; ($A_3$) $(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}).\mathfrak{D}.\mathfrak{E}\to\mathfrak{C}$.

Schema *Q*. $\mathfrak{A}\to\nu$ (Ersetzung von $\mathfrak{A}$ durch eine willkürlich gewählte Formel liefert einen Satz).

Dies ist eine Folge von Axiom 3° und Einsetzungsregel E.

In der affirmativen Aussagenlogik A_1 läszt sich somit ein logistischer oder L-Kalkül LG_1 einbetten, der: 1° *Kalkülformeln gemäsz Regel E (erster Teil)* (§ 1) *hat;* 2° *die Einsetzungsschemata P und Q besitzt;* 3° *daneben die Schluszschemata A_1, A_2, A_3, A_4, UES, UEA, FES, FEA, während:* 4° *der zweite Teil der Einsetzungsregel die Form erhält: „läszt sich auf Grund der eben genannten Schemata schreiben $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$, mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Kalkülformeln, und sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ mittels Regel E (erster Teil) aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ hervorgehende Kalkülformeln, wobei sowohl in $\mathfrak{A}$ wie in $\mathfrak{B}$ vorkommende gleichgestaltete Buchstaben in beiden nicht oder in beiden an allen Stellen durch gleichgestaltete Kalkülformeln ersetzt sind, so läszt sich auch schreiben $\mathfrak{D}\to\mathfrak{E}$"*; Theoreme dieses Kalküls sind die „affirmativen" Sequenzen $\nu\to\mathfrak{A}$.

Mit A_1, A_3 und *FES* leitet man leicht in dem Kalkül LG_1 folgendes Schema ab:

$$\frac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\nu\to(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})};$$

mit *UES* folgt in LG_1 das Schema:

$$\frac{\nu\to\mathfrak{A}\qquad\nu\to\mathfrak{B}}{\nu\to(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})}.$$

§ 17bis. *In der affirmativen Aussagenlogik A_2* (§ 3) *läszt sich ein L-Kalkül LG_2 einbetten, welcher aus dem Kalkül LG_1 durch Hinzufügung nachfolgender Schemata OEA und OES entsteht* (Einsetzungsregel entsprechend erweitert). [54])

[54]) Es läszt sich unschwer beweisen, dasz der Umfang von LG_2 sich nicht ändert, wenn man die Schemata *UEA* und *OEA* durch die engeren Schemata UEA^* und OEA^* (§§ 18, 18*bis*) ersetzt.

Schema *OEA*. $\dfrac{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}\quad\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}}$ („Oder"-Einführung im Antezedens);
($\mathfrak{C}$ darf fehlen)

Schema *OES*. $\dfrac{\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}\to(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}\quad\dfrac{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\to(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}$ („Oder"-Einführung im Sukzedens).

§ 18. Dual gegenüber § 17 steht:

In der verneinenden Aussagenlogik A_1^* läszt sich, mittels der Definition *„Eine Sequenz* $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\ldots+\mathfrak{A}_\mu$ (μ eine ganze Zahl $\geqq 1$) ist eine andere Schreibweise für den Satz $\mathfrak{B}\subset(\ldots((\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2)+\mathfrak{A}_3)+\ldots+\mathfrak{A}_\mu)$ [also $\mathfrak{B}\to\lambda$ für das (verneinende) Theorem $\mathfrak{B}\subset\lambda$]", *ein logistischer oder L-Kalkül LG_1^* einbetten, der:* 1° *Kalkülformeln gemäsz Regel E* (erster Teil)* (§ 2) *hat;* 2° *die Einsetzungsschemata:*

$P\cdot\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$; *und:*

$R\cdot\lambda\to\mathfrak{A}$

besitzt; 3° *daneben die folgenden Schluszschemata benutzt:*

A_1^*. Verdünnung im Sukzedens: $\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}+\mathfrak{D}}$;

A_2^*. Zusammenziehung im Sukzedens: $\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}+\mathfrak{D}}$;
($\mathfrak{A}$ darf fehlen)

A_3^*. Vertauschung im Sukzedens: $\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}+\mathfrak{E}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}+\mathfrak{D}+\mathfrak{E}+\mathfrak{A}}$;
($\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}$ oder beide dürfen fehlen)

A_4^*. Schnitt: $\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\quad\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}\to\mathfrak{C}+\mathfrak{A}}$; ($\mathfrak{C}$ darf fehlen)

*OEA**. $\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{D}\quad\mathfrak{B}\to\mathfrak{D}}{(\mathfrak{B}+\mathfrak{A})\to\mathfrak{D}}$;

*OES**. $\dfrac{\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}+\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{A})}\quad\dfrac{\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{A})}$; ($\mathfrak{D}$ darf fehlen)

*FEA***. $\dfrac{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}+\mathfrak{A}}{(\mathfrak{C}\subset\mathfrak{A})\to\mathfrak{B}}$;

*FES***. $\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{D}\quad\mathfrak{C}\to\mathfrak{E}+\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\to\mathfrak{E}+\mathfrak{D}+(\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A})}$ ($\mathfrak{E}$ darf fehlen),

während: 4° *der zweite Teil der Einsetzungsregel die Form erhält: „läszt sich auf Grund der eben genannten Schemata schreiben* $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$, *mit* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *Kalkülformeln, und gehen* $\mathfrak{D}$ *und* $\mathfrak{E}$ *mittels Regel E* (erster Teil) in*

bekannter Weise aus $\mathfrak{A}$ *bzw.* $\mathfrak{B}$ *hervor, so läszt sich auch schreiben* $\mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$"; Theoreme von LG_1^* sind die „negierenden" Sequenzen $\mathfrak{A} \to \lambda$.

In LG_1^* lassen sich folgende Schemata ableiten:

$$\frac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}}{(\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}) \to \lambda} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathfrak{A} \to \lambda \quad \mathfrak{B} \to \lambda}{(\mathfrak{B} + \mathfrak{A}) \to \lambda}.$$

§ 18*bis*. *In der verneinenden Aussagenlogik* A_2^* (§ 4) *läszt sich ein L-Kalkül* LG_2^* *einbetten, welcher aus dem Kalkül* LG_1^* *durch Hinzufügung nachfolgender Schemata* UES^* *und* UEA^* *entsteht* (Einsetzungsregel entsprechend erweitert).

Schema UES^*. $\dfrac{\mathfrak{D} \to \mathfrak{C} + \mathfrak{A} \quad \mathfrak{D} \to \mathfrak{C} + \mathfrak{B}}{\mathfrak{D} \to \mathfrak{C} + (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A})}$ ($\mathfrak{C}$ darf fehlen);

Schema UEA^*. $\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}}{(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C}} \qquad \dfrac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}{(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \to \mathfrak{C}}$.

Einbettung von „natürlichen" Kalkülen in LG_1, LG_2, LG_1^* und LG_2^*.

§ 19. In diesem Par. beschränken wir uns auf den Kalkül LG_1 (§ 17).

Schema UE. $\dfrac{\begin{matrix}[\mathfrak{D}] & [\mathfrak{E}] \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{B}\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}] \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\end{matrix}}$ („Und"-Einführung)

sei eine andere Schreibweise von: $\dfrac{\mathfrak{D} \to \mathfrak{A} \quad \mathfrak{E} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E} \to (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})}$.

UE läszt sich in LG_1 mit A_1, A_3 und UES ableiten.

Schema UB. $\dfrac{\begin{matrix}[\mathfrak{D}] \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{D}] \\ \mathfrak{A}\end{matrix}} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\mathfrak{D}] \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{D}] \\ \mathfrak{B}\end{matrix}}$ („Und"-Beseitigung)

sei eine andere Schreibweise von: $\dfrac{\mathfrak{D} \to (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})}{\mathfrak{D} \to \mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\mathfrak{D} \to (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})}{\mathfrak{D} \to \mathfrak{B}}$.

Beweis mit den Schemata P, A_1, A_3, A_4 und der Einsetzungsregel.

Schema FE. $\dfrac{\begin{matrix}[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}] \\ \mathfrak{B}\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{D}] \\ \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}\end{matrix}}$ („Folge"-Einführung)

sei eine andere Schreibweise von: $\dfrac{\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{D} \to (\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B})}$.

Beweis mit *FES* und A_3.

Schema *FB*. $\dfrac{\overset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{A}} \quad \overset{[\mathfrak{E}]}{\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}}}{\overset{[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}]}{\mathfrak{B}}}$ („Folge"-Beseitigung)

sei eine andere Schreibweise von: $\dfrac{\mathfrak{D} \to \mathfrak{A} \quad \mathfrak{E} \to (\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B})}{\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E} \to \mathfrak{B}}$.

Beweis mit den Schemata *P*, *FEA*, A_4, A_3 und der Einsetzungsregel. A_1, A_2 und A_3 lassen sich schreiben:

Schema B_1. $\dfrac{\overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}}{\overset{[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}}$ Schema B_2. $\dfrac{\overset{[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}}{\overset{[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}}$ ($\mathfrak{A}$ darf fehlen)

Schema B_3. $\dfrac{\overset{[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{C}]}{\mathfrak{B}}}{\overset{[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C}]}{\mathfrak{B}}}$ ($\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}$ oder beide dürfen fehlen)

A_4 liefert das Schema: $\dfrac{\mathfrak{D} \to \mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{D} \to \mathfrak{B}}$, welches sich schreiben läszt:

Schema *Sn*. $\dfrac{\overset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{A}} \quad \overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}}{\overset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{B}}}$.

Schlieszlich lassen sich die Schemata *P* und *Q* schreiben:

P_0. $\overset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{D}}$ und Q_0. $\overset{[\mathfrak{A}]}{\nu}$.

In dem logistischen Kalkül LG_1 *läszt sich somit ein natürlicher oder N-Kalkül* NG_1 *einbetten, der:* 1° *Kalkülformeln gemäsz Regel E (erster Teil)* (§ 1) *hat;* 2° *die Einsetzungsschemata* P_0 *und* Q_0 *besitzt;* 3° *daneben die Schluszschemata* B_1, B_2, B_3, *Sn*, *UE*, *UB*, *FE und FB, während:* 4° *der zweite Teil der Einsetzungsregel denselben Wortlaut wie für* LG_1 *hat, nur mit* $\overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}$ *und* $\overset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{E}}$ *statt* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *bzw.* $\mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$; *ein am Ende einer Schluszreihe auftretendes Schema* $\overset{[\mathfrak{P}]}{\mathfrak{Q}}$ *liefert die Sequenz (den Satz)* $\mathfrak{P} \to \mathfrak{Q}$; Theoreme sind die „affirmativen" Sequenzen $\nu \to \mathfrak{A}$.

Mit B_1 und *FE* leitet man in NG_1 ab: $\dfrac{\overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}}{\overset{[\nu]}{\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}}}$;

mit *UE* und B_2 folgt das Schema: $\dfrac{\overset{[\nu]}{\mathfrak{A}} \quad \overset{[\nu]}{\mathfrak{B}}}{\overset{[\nu]}{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}}}$.

§ 19bis. *In dem logistischen Kalkül* LG_2 (§ 17bis) *läszt sich ein N-Kalkül* NG_2 *einbetten, welcher aus dem Kalkül* NG_1 *durch Hinzufügung nachfolgender Schemata OE und OB entsteht* (Einsetzungsregel entsprechend erweitert).

Schema *OE*. $\dfrac{\overset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{A}}}{\underset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}}$ $\dfrac{\overset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{B}}}{\underset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}}$ („Oder"-Einführung).

Schema *OB*. $\dfrac{\overset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} \quad \overset{[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{A}]}{\mathfrak{C}} \quad \overset{[\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{B}]}{\mathfrak{C}}}{\underset{\mathfrak{C}}{[\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{F}]}}$ („Oder"-Beseitigung).

($\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{F}$ oder beide dürfen fehlen)

§ 20. Dual gegenüber § 19 steht:

In Kalkül LG_1^* *von* § 18 *läszt sich*, mittels der Definition "Ein Schema $\overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}$ ist eine andere Schreibweise der Sequenz $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ [also $\overset{[\mathfrak{A}]}{\lambda}$ für die „verneinende" Sequenz $\mathfrak{A} \to \lambda$]", *ein natürlicher oder N-Kalkül* NG_1^* *einbetten, der:* 1° *Kalkülformeln gemäsz Regel E* (erster Teil)* (§ 2) *hat;* 2° *die Einsetzungsschemata:*

$P_0.\ \overset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{D}}$; *und:* $R_0.\ \overset{[\lambda]}{\mathfrak{A}}$

besitzt; 3° *daneben die folgenden Schluszschemata benutzt:*

$B_1^*.\ \dfrac{\overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}}}{\underset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}+\mathfrak{D}}}$; $B_2^*.\ \dfrac{\overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{D}}}{\underset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}+\mathfrak{D}}}$ ($\mathfrak{A}$ darf fehlen); $B_3^*.\ \dfrac{\overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{C}+\mathfrak{E}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}}}{\underset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{C}+\mathfrak{D}+\mathfrak{E}+\mathfrak{A}}}$ ($\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}$ oder beide dürfen fehlen);

Sn (siehe § 19);

$OE^*.\ \dfrac{\overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{D}} \quad \overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{E}}}{\underset{\mathfrak{E}+\mathfrak{D}}{[\mathfrak{B}+\mathfrak{A}]}}$; $OB^*.\ \dfrac{\overset{[\mathfrak{B}+\mathfrak{A}]}{\mathfrak{D}}}{\underset{\mathfrak{D}}{[\mathfrak{A}]}}$ $\dfrac{\overset{[\mathfrak{B}+\mathfrak{A}]}{\mathfrak{D}}}{\underset{\mathfrak{D}}{[\mathfrak{B}]}}$;

$FE^*.\ \dfrac{\overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}+\mathfrak{D}}}{\underset{\mathfrak{D}}{[\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}]}}$; $FB^*.\ \dfrac{\overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{D}} \quad \overset{[\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}]}{\mathfrak{E}}}{\underset{\mathfrak{E}+\mathfrak{D}}{[\mathfrak{B}]}}$,

während: 4° *der zweite Teil der Einsetzungsregel denselben Wortlaut wie für* LG_1^* *hat, nur mit* $\overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}$ *und* $\overset{[\mathfrak{D}]}{\mathfrak{E}}$ *statt* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *bzw.* $\mathfrak{D} \to \mathfrak{E}$; Theoreme von NG_1^* sind die „negierenden" Sequenzen $\mathfrak{A} \to \lambda$.

In NG_1^* hat man die Schemata:

$$\frac{\begin{matrix}[\mathfrak{B}]\\ \mathfrak{A}\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}]\\ \lambda\end{matrix}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\begin{matrix}[\mathfrak{A}] & [\mathfrak{B}]\\ \lambda & \lambda\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{B}+\mathfrak{A}]\\ \lambda\end{matrix}}$$

§ 20bis. *In LG_2^* (§ 18bis) läszt sich ein N-Kalkül NG_2^* einbetten, welcher aus dem Kalkül NG_1^* durch Hinzufügung nachfolgender Schemata UE^* und UB^* entsteht* (Einsetzungsregel entsprechend erweitert).

UE^*. $\dfrac{\begin{matrix}[\mathfrak{A}]\\ \mathfrak{D}\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}]\\ \mathfrak{D}\end{matrix}} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\mathfrak{B}]\\ \mathfrak{D}\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}]\\ \mathfrak{D}\end{matrix}}$.

UB^*. $\dfrac{\begin{matrix}[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}] & [\mathfrak{C}] & [\mathfrak{C}]\\ \mathfrak{D} & \mathfrak{A}+\mathfrak{E} & \mathfrak{B}+\mathfrak{F}\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{C}]\\ \mathfrak{F}+\mathfrak{E}+\mathfrak{D}\end{matrix}}$ ($\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{F}$ oder beide dürfen fehlen).

Aequivalenz der Kalküle A_j, LG_j, NG_j und A_j^*, LG_j^*, NG_j^* $(j = 1, 2)$.

§ 21. Durch Umsetzung des am Ende einer Schluszreihe auftretenden Schemas $\begin{matrix}[\mathfrak{P}]\\ \mathfrak{Q}\end{matrix}$ in die Form $\mathfrak{P}\to\mathfrak{Q}$ läszt sich in dem Kalkül NG_1 folgendes ableiten:

P_0 liefert: $X\subset X$ (d.i. Axiom 1^a von Kalkül A_1).

P_0 und UB liefern: $(X.Y)\subset X$ und $(X.Y)\subset Y$ (d.i. Ax. 2^a von A_1).

Q_0 liefert: $X\subset\nu$ (d.i. Ax. 3°).

Sn liefert: $\dfrac{\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\quad\mathfrak{B}\subset\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\subset\mathfrak{C}}$ (d.i. Schema 1^β).

UE und B_2 liefern: $\dfrac{\mathfrak{C}\subset\mathfrak{A}\quad\mathfrak{C}\subset\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\subset[\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}]}$ (d.i. Schema 2^β).

FE liefert: $\dfrac{[\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}]\subset\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\subset[\mathfrak{B}\subset\mathfrak{C}]}$ (d.i. der erste Teil von Schema E_c).

(P_0) $\quad\begin{matrix}[\mathfrak{B}] & [\mathfrak{A}]\\ \mathfrak{B} & \mathfrak{B}\subset\mathfrak{C}\end{matrix}$

(FB) $\quad\dfrac{}{[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}]}$

(B_3) $\quad\dfrac{\mathfrak{C}}{\begin{matrix}[\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}]\\ \mathfrak{C}\end{matrix}}$ oder $\dfrac{\mathfrak{A}\subset[\mathfrak{B}\subset\mathfrak{C}]}{(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})\subset\mathfrak{C}}$ (d.i. der zweite Teil von Sch. E_0).

Da schlieszlich die Einsetzungsregel E (zweiter Teil) von § 1 auf in NG_1 abgeleitete Sätze $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$ anwendbar ist, zeigt sich, dasz die Logik A_1 im Kalkül NG_1 eingebettet ist. Nach § 17 ist LG_1 in A_1, nach § 19 NG_1 in LG_1 eingebettet. Dies liefert:

Die Kalküle A_1, LG_1 und NG_1 sind völlig aequivalent.

Man sieht leicht, *dasz auch die Kalküle A_2, LG_2 und NG_2 aequivalent sind* (§§ 17bis, 19bis, 3).

Die dualen Resultate sind:

Die verneinende Aussagenlogik A_1^*, der Kalkül LG_1^* und der Kalkül NG_1^* sind aequivalent; ebenfalls aequivalent sind die Kalküle A_2^*, LG_2^* und NG_2^*.

Mit M und M^* aequivalente logistische und natürliche Kalküle.

§ 22. Die im Kalkül M neu hinzugekommenen Axiome 6^α und 6^β (§ 5) ermöglichen die Ableitung folgender Schluszschemata für die in § 17 eingeführten Sequenzen:

$$NES.\ \frac{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\to\lambda}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}'};\qquad NEA.\ \frac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'\cdot\mathfrak{B}\to\lambda}.$$

Ableitung von *NES*: $(\mathfrak{A}.\mathfrak{B})\subset\lambda$; (E_0) $\mathfrak{B}\subset(\mathfrak{A}\subset\lambda)$; $(6^\alpha, E)$ $(\mathfrak{A}\subset\lambda)\subset\subset\mathfrak{A}'$; (1^β) $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}'$.

Ableitung von *NEA*: $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$; $(\mathfrak{A}'.\mathfrak{B})\subset(\mathfrak{A}'.\mathfrak{A})$; $(6^\beta, E)$ $(\mathfrak{A}'.\mathfrak{A})\subset\lambda$; (1^β) $(\mathfrak{A}'.\mathfrak{B})\subset\lambda$.

LM sei ein mit *NES* und *NEA* erweiterter Kalkül LG_2 (Einsetzungsregel entsprechend erweitert). Dann ist *LM in M eingebettet.*

§ 22bis. *NES* und *NEA* gestatten in *LM* für die in § 19 eingeführten Schemata $\overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{Q}}$ die Ableitung folgender Schluszschemata:

$$NE.\ \frac{\overset{[\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}]}{\lambda}}{\overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}'}};\qquad NB.\ \frac{\overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}}\quad\overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}'}}{\overset{[\mathfrak{B}]}{\lambda}}\left(,\ \text{oder}\ \frac{\overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'}}{\overset{[\mathfrak{B}]}{\lambda}}\right).$$

Ableitung von *NE*: $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}\to\lambda$; (NES) $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}'$.

Ableitung von *NB*: $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$; (NEA) $\mathfrak{A}'.\mathfrak{B}\to\lambda$; $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}'$ und (Sch. *P*) $\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$; (UES) $\mathfrak{B}\to(\mathfrak{A}'.\mathfrak{B})$; (A_4) $\mathfrak{B}\to\lambda$.

NM sei ein mit *NE* und *NB* erweiterter Kalkül NG_2 (Einsetzungsregel entsprechend erweitert). Dann ist *NM in LM eingebettet.*

§ 22ter. In *NM* sind 6^α und 6^β ableitbar.

Ableitung von 6^α:

$$\begin{array}{ll} & (P_0)\ \ \overset{[X]}{X}\quad\overset{[X\subset\lambda]}{X\subset\lambda}\\ & (FB)\ \ \dfrac{}{[X\cdot(X\subset\lambda)]}\\ & (NE)\ \ \dfrac{\lambda}{\overset{[X\subset\lambda]}{X'}} \end{array}\qquad \text{d.h. } (X\subset\lambda)\subset X'.$$

Ableitung von 6^β:

$$\begin{array}{ll} & (P_0, B_1, B_3)\ \ \overset{[X\cdot X']}{X}\quad\overset{[X\cdot X']}{X'}\\ & (NB)\ \ \dfrac{}{X\ \ X']}\\ & \lambda \end{array}\qquad \text{d.h. } (X\cdot X')\subset\lambda.$$

Dies zeigt, dasz M in NM eingebettet ist. Somit:
Die Kalküle M, LM und NM sind aequivalent.

§ 23. Dual gegenüber § 22 steht:
Ist LM^* ein mit den Schemata

$$NEA^{**}.\ \frac{\nu \to \mathfrak{B} + \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}' \to \mathfrak{B}} \quad ; \quad NES^{**}.\ \frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\nu \to \mathfrak{B} + \mathfrak{A}'}$$

erweiterter Kalkül LG_2^* (Einsetzungsregel entsprechend erweitert), so ist *LM^* in M^* eingebettet.*

§ 23bis. Ist NM^* ein mit den Schemata

$$NE^*.\ \frac{\overset{[\nu]}{\mathfrak{B} + \mathfrak{A}}}{\underset{\mathfrak{B}}{[\mathfrak{A}']}} \quad ; \quad NB^*.\ \frac{\overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}} \quad \overset{[\mathfrak{A}']}{\mathfrak{B}}}{\underset{\mathfrak{B}}{[\nu]}}$$

erweiterter Kalkül NG_2^* (Einsetzungsregel entsprechend erweitert), so ist *NM^* in LM^* eingebettet.*

§ 23ter. *Die Kalküle M^*, LM^* und NM^* sind aequivalent.*

Logistische und natürliche Kalküle aequivalent mit I, K, I^* oder K^*.

§ 24. Definitionen. LI sei ein Kalkül LM, welcher das Schema R (§ 18) erfüllt; LK sei ein Kalkül LI, welcher das Schema

$S.\ \ \nu \to (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}')$

erfüllt.

Definitionen. NI sei ein Kalkül NM, welcher das Schema R_0 (§ 20) erfüllt; NK sei ein Kalkül NI, welcher das Schema

$$S_0.\ \overset{[\nu]}{\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'}$$

erfüllt.

Die Kalküle I, LI und NI sind aequivalent; ebenso die Kalküle K, LK und NK. (Beweise evident).

§ 25. Definitionen. LI^* sei ein Kalkül LM^*, welcher das Schema Q (§ 17) erfüllt; LK^* sei ein Kalkül LI^*, welcher das Schema

$T.\ \ (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}') \to \lambda$

erfüllt.

Definitionen. NI^* sei ein Kalkül NM^*, welcher das Schema Q_0 (§ 19) erfüllt; NK^* sei ein Kalkül NI^*, welcher das Schema

$$T_0.\ \underset{\lambda}{[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}']}$$

erfüllt.

Die Kalküle I^*, LI^* und NI^* sind aequivalent; ebenso die Kalküle K^*, LK^* und NK^*.

Weitere Bemerkungen über die logistischen Kalküle.

§ 26. a_1. Mit Hilfe des Axiomensystems von Kalkül A_2 lassen sich für den mit A_2 aequivalenten logistischen Kalkül LG_2 nicht nur die in §§ 17 und 17bis gegebenen Schemata ableiten, sondern auszerdem die Schemata A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^* [55]), *UES** (verallgemeinert *UES*), *OES** (verallgemeinert *OES*) (§§ 18 und 18bis), und das Schema:

$$FEA^\circ.\ \frac{\mathfrak{D} \to (\mathfrak{A} + \mathfrak{F}) \qquad \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{E} \to \mathfrak{C}}{(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E} \to (\mathfrak{C} + \mathfrak{F})}$$ [56]) (verallgemeinert *FEA*);

die Schemata *UEA* und *OEA* haben schon ihre allgemeinere Form (vergl. *UEA** und *OEA**).

Die allgemeinere Form

$$FES^\circ.\ \frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \to (\mathfrak{C} + \mathfrak{D})}{\mathfrak{B} \to [(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}) + \mathfrak{D}]}$$

von FES gilt dagegen im Kalkül LG_2 nicht.

Denn sogar in der in § 7 betrachteten HEYTINGschen Gruppe für den intuitionistischen Aussagenkalkül gilt *FES*° nicht; $\mathfrak{A} = 2$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 1$, $\mathfrak{D} = 2$ liefern für $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \subset (\mathfrak{C} + \mathfrak{D})$ den Wert 0, dagegen für $\mathfrak{B} \subset [(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}) + \mathfrak{D}]$ den Wert 2.

b_1. Für den mit Kalkül A_2^* aequivalenten logistischen Kalkül LG_2^* lassen sich in A_2^* nicht nur die in §§ 18 und 18bis gegebenen Schemata ableiten, sondern auszerdem die Schemata A_1, A_2, A_3, A_4 [55]), *OEA* (verallgemeinert *OEA**), *UEA* (verallgemeinert *UEA**) (§§ 17 und 17bis), und das Schema:

$$FES^{\circ\circ}.\ \frac{(\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{A}) \to \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{C} \to \mathfrak{E} + \mathfrak{B}}{(\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{C}) \to \mathfrak{E} + \mathfrak{D} + (\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A})}$$ (verallgemeinert *FES***);

die Schemata *OES** und *UES** haben schon ihre allgemeinere Form (vergl. *OES* und *UES*).

Die allgemeinere Form

$$FEA^{\circ\circ}.\ \frac{(\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} + \mathfrak{A}}{[\mathfrak{D} \cdot (\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A})] \to \mathfrak{B}}$$

*von FEA*** *gilt dagegen im Kalkül LG_2^* nicht.*

§ 27. a_2. *Für den mit M aequivalenten Kalkül LM* (§ 22) *ist es nicht möglich das Schluszschema NES zu erweitern zu*:

$$NES^\circ.\ \frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}{\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A}' + \mathfrak{C})},$$ [56bis])

---

[55]) Auch das A_4 und A_4^* umfassende „Schnitt"-Schema von Gentzen:

$$\frac{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} + \mathfrak{H}) \qquad \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}}{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} \to (\mathfrak{B} + \mathfrak{D})}.$$

[56]) Ableitung: $\{(\mathfrak{A} + \mathfrak{F}) \cdot [(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}]\} \subset$ (distr.) $[\{\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}\} + \{\mathfrak{F} \cdot (\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}\}]$; $(E_0, 1^a)$ $[\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B})] \subset \mathfrak{B}$, also $[\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}] \subset (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}) \subset (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{E}) \subset \mathfrak{C} \subset (\mathfrak{C} + \mathfrak{F})$; $[\mathfrak{F} \cdot (\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}] \subset \mathfrak{F} \subset (\mathfrak{C} + \mathfrak{F})$; somit $\{(\mathfrak{A} + \mathfrak{F}) \cdot [(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}]\} \subset (\mathfrak{C} + \mathfrak{F})$, und umsomehr, wegen $\mathfrak{D} \subset (\mathfrak{A} + \mathfrak{F})$, $\{\mathfrak{D} \cdot [(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}]\} \subset (\mathfrak{C} + \mathfrak{F})$ oder $[(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}] \subset (\mathfrak{C} + \mathfrak{F})$.

[56bis]) Es wird deutlich sein wie das Schema gelesen werden musz, falls $\mathfrak{C}$ mit λ oder ν zusammenfällt, um wirklich eine „Erweiterung" zu sein.

und ebenso ist es nicht möglich das Schema NEA zu erweitern zu

$$NEA^{\circ}.\ \frac{\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})}{\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}.$$ [56bis])

Denn: 1° die unter a_1 betrachtete Gruppe liefert mit $\mathfrak{A} = 2$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 2$ den Wert 0 für $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{C}$, und den Wert 2 für $\mathfrak{B} \subset (\mathfrak{A}' + \mathfrak{C})$; 2° die in § 5 am ersten betrachtete Gruppe, mit $\lambda = \nu = 0$, liefert mit $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 1$ den Wert 0 für $\mathfrak{B} \subset (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})$, und den Wert 1 für $(\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{C}$.

Schlieszlich zeigt das Beispiel unter a_1, *dasz FES ebenfalls nicht in seiner allgemeineren Form FES° in LM gilt.*

b_2. *Für den mit M* aequivalenten Kalkül LM** (§ 23) *ist es nicht möglich das Schluszschema NEA** zu erweitern zu*

$$NEA^{\circ\circ}.\ \frac{\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} + \mathfrak{A}}{(\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}') \to \mathfrak{B}},$$ [56bis])

*und ebenso ist es nicht möglich NES** zu erweitern zu*

$$NES^{\circ\circ}.\ \frac{(\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}) \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} + \mathfrak{A}'};$$ [56bis]) [57])

*auch FEA** gilt nicht in seiner allgemeineren Form FEA°°.*

§ 28. a_3. *Für den mit I aequivalenten Kalkül LI* (§ 24) *ist es nicht möglich NES zu erweitern zu NES°*; das folgt aus dem schon unter a_2, 1° betrachteten Beispiel. *Auch das unter a_1 angegebene allgemeinere Schema FES° gilt nicht*, wie aus dem dort betrachteten Beispiel folgt. *Dagegen läszt sich das Schema NEA erweitern zu NEA°* (siehe a_2).

Ableitung von *NEA°*: $(\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B} \subset (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})$, also $(\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}) \subset \subset [\mathfrak{A}' \cdot (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})]$; (distr.) $(\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}) \subset [(\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}) + (\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{C})] \subset (6^{\beta})\ [\lambda + \mathfrak{C}] \subset \subset (5°)\ \mathfrak{C}$, oder $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$.

b_3. *Für den mit I* aequivalenten Kalkül LI** (§ 25) *ist es nicht möglich NEA** zu erweitern zu NEA°°* [57]), *oder FEA** zu erweitern zu FEA°°; dagegen läszt sich NES** erweitern zu NES°°.* [57])

§ 29. a_4. *In dem mit K aequivalenten Kalkül LK* (§ 24) *gelten alle Schemata in erweiterer Form;* somit gelten *FES°* und *NES°*.

Ableitung von *NES°*: $\mathfrak{B} \subset (3°)\ (\mathfrak{B} \cdot \nu) \subset (7°)\ [\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{A}' + \mathfrak{A})] \subset (\mathfrak{A}' + + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}) \subset (\mathfrak{A}' + \mathfrak{C})$.

Bemerkung. In § 24 wurde ein Kalkül *LK* charakterisiert als ein Kalkül *LI*, welcher das Schema *S* erfüllt. Dies läszt sich ändern in: *ein Kalkül LK ist ein Kalkül LI, welcher NES° erfüllt.* Denn *NES°* liefert: $\frac{\mathfrak{A} \cdot \nu \to \mathfrak{A}}{\nu \to (\mathfrak{A}' + \mathfrak{A})}$ oder $\nu \to (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}')$.

Aus Fuszn. 54 geht hervor, dasz *LI* sich aufbauen läszt auf Einsetzungsregel, Einsetzungsschemata *P*, *Q*, *R*, die Schluszschemata A_1, A_2,

---

[57]) Wir bemerken, *dasz NEA° und NEA°° aequivalent sind; ebenso NES° und NES°°.*

A_3, A_4 und die engeren Schluszschemata *UES*, *UEA**, *OES*, *OEA**, *FES*, *FEA*, *NES*, *NEA*; ändert man *NES* in *NES°*, so entsteht ein System, das *LK* charakterisiert.

Ableitung von *FES°* (für *LK*): $[(\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A})+\lambda]\subset(5°)\,\mathfrak{C}$, also (6^{β}) $[(\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A})+(\mathfrak{A}'\cdot\mathfrak{A})]\subset\mathfrak{C}$, oder $[(\mathfrak{C}+\mathfrak{A}')\cdot\mathfrak{A}]\subset\mathfrak{C}$ oder (E_0) $(\mathfrak{C}+\mathfrak{A}')\subset\mathfrak{C}\,[\mathfrak{A}\subset\mathfrak{C}]$. Dadurch: $\mathfrak{B}\subset(3°)$ $(\mathfrak{B}\cdot\nu)\subset(7°)$ $[\mathfrak{B}\cdot(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}')]\subset[(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A})+(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}')]\subset[(\mathfrak{C}+\mathfrak{D})+\mathfrak{A}']\subset[(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{C})+\mathfrak{D}]$.

b_4. *In dem mit K* aequivalenten Kalkül LK* (§ 25) gelten alle Schemata in erweiterter Form;* somit gelten $FEA^{\circ\circ}$ und $NEA^{\circ\circ}\equiv NEA^{\circ}$.

Bemerkung. *Ein Kalkül LK* läszt sich somit auch charakterisieren als ein Kalkül LI*, welcher NEA° erfüllt.*

Logistische und natürliche Kalküle für die engeren Prädikatenlogiken.

§ 30. Definition *a*. LP_1 sei ein Kalkül LG_1 (§ 17), welcher die Schemata *AEA* und *AES* erfüllt. [58])

AEA. $\dfrac{F(a)\cdot\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{(x)\,F(x)\cdot\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}$ ($\mathfrak{A}$ darf fehlen).

AES. $\dfrac{\mathfrak{A}\to F(a)\ \text{(in }\mathfrak{A}\text{ kommt }a\text{ nicht vor)}}{\mathfrak{A}\to(x)\ F(x)}$.

Die Kalküle P_1 (§ 15) *und* LP_1 *sind aequivalent.* [59])

Definition *a**. LP_1^* sei ein Kalkül LG_1^* (§ 18), welcher die Schemata *EES* und *EEA* erfüllt. [58])

EES. $\dfrac{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}+F(a)}{\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}+(Ex)\,F(x)}$ ($\mathfrak{A}$ darf fehlen).

EEA. $\dfrac{F(a)\to\mathfrak{A}\ \text{(in }\mathfrak{A}\text{ komt }a\text{ nicht vor)}}{(Ex)\,F(x)\to\mathfrak{A}}$.

Die Kalküle P_1^* (§ 15bis) *und* LP_1^* *sind aequivalent.* [60])

Definition *b*. LP_2 sei ein Kalkül LG_2 (§ 17bis), welcher die Schemata *AEA*, *AES*, *EES* und *EEA* erfüllt. [58])

Die Kalküle P_2 (§ 15) *und* LP_2 *sind aequivalent.*

Definition *b**. LP_2^* sei ein Kalkül LG_2^* (§ 18bis), welcher die vier obigen Schemata erfüllt. [58])

Die Kalküle P_2^* (§ 15bis) *und* LP_2^* *sind aequivalent.*

---

[58]) Auszerdem soll die Einsetzungsregel für jeden Kalkül in sinngemäszer Weise erweitert, und eine Umbenennungsregel für gebundene Variable hinzugefügt werden; wie dies jedesmal zu geschehen hat, geht aus der Lektüre von Hilbert-Ackermann, loc. cit. 53), S. 54, 56 u. 57 leicht hervor.

[59]) Hier und im folgenden kann *AEA* überall durch *AEA**. $\dfrac{F(a)\to\mathfrak{B}}{(x)\,F(x)\to\mathfrak{B}}$ ersetzt werden.

[60]) Hier und im folgenden kann *EES* überall durch *EES**. $\dfrac{\mathfrak{B}\to F(a)}{\mathfrak{B}\to(Ex)\,F(x)}$ ersetzt werden.

Definitionen c, c^*. *LMP*, *LIP*, *LKP* [*LMP**, *LIP**, *LKP**] entstehen aus *LM* bzw. *LI* bzw. *LK* [aus *LM** bzw. *LI** bzw. *LK**] durch Hinzufügung von *AES*, *AEA*, *EES* und *EEA*.[58])

So entstehen *folgende Paare von aequivalenten Kalkülen: MP und LMP; IP und LIP; KP und LKP; MP** *und LMP**; *IP** *und LIP**; *KP** *und LKP**.

§ 31. Definition a_0. NP_1 sei ein Kalkül NG_1 (§ 19), welcher die Schemata *AE* und *AB* erfüllt.[58])

$$AB.\ \frac{\begin{matrix}[\mathfrak{A}]\\ (x)\ F(x)\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{A}]\\ F(a)\end{matrix}} \qquad AE.\ \frac{\begin{matrix}[\mathfrak{A}]\\ F(a)\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{A}]\\ (x)\ F(x)\end{matrix}}\quad (\mathfrak{A} \text{ enthält } a \text{ nicht}).$$

Die Kalküle LP_1 (§ 30) *und* NP_1 *sind aequivalent.*

Definition b_0. NP_2 sei ein Kalkül NG_2 (§ 19bis), welcher die Schemata *AE*, *AB*, *EE* und *EB* erfüllt.[58])

$$EE.\ \frac{\begin{matrix}[\mathfrak{A}]\\ F(a)\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{A}]\\ (Ex)\ F(x)\end{matrix}} \qquad EB.\ \frac{\begin{matrix}[\mathfrak{A}] \quad [F(a)]\\ (Ex)\ F(x) \quad \mathfrak{C}\end{matrix}}{\begin{matrix}[\mathfrak{A}]\\ \mathfrak{C}\end{matrix}}\quad (\mathfrak{C} \text{ enthält } a \text{ nicht}).$$

Die Kalküle LP_2 (§ 30) *und* NP_2 *sind aequivalent.*

Definition c_0. *NMP*, *NIP* und *NKP* entstehen aus *NM* bzw. *NI* bzw. *NK* durch Hinzufügung von *AE*, *AB*, *EE* und *EB*.[58])

Die folgenden Paare sind *Paare von aequivalenten Kalkülen: LMP und NMP; LIP und NIP; LKP und NKP.*[61])

---

[61]) Die Einführung der zu den Kalkülen von § 31 dualen fordert die Anwendung von vier Schemata, bzw. dual zu *AE*, *AB*, *EE* und *EB*.