MATHEMATICS

FORMALISTISCHE BETRACHTUNGEN ÜBER INTUITIONISTISCHE UND VERWANDTE LOGISCHE SYSTEME. IV

VON

J. RIDDER

(Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER at the meeting of Sept. 30, 1950)

Nähere Betrachtung des "logistischen Kalküls" LG_1

§ 32. Das System von Regel und Schemata für LG_1 läszt folgende Abänderungen zu (ohne dasz dabei die Klasse der (ableitbaren) Sequenzen oder Sätze sich ändert).

1° *Die Einsetzungsregel kann auf Einsetzungen in P oder Q beschränkt bleiben.*

Denn jede von einer Einsetzung in P oder Q verschiedene Einsetzung (etwa von $\mathfrak{M}$ für X) findet in einer Untersequenz U eines Ableitungsschemas A_1—A_4, UES, UEA, FES oder FEA statt (U soll dabei in U^* übergehen). Sie ist zu ersetzen durch eine Einsetzung in der Obersequenz O oder den Obersequenzen O_1, O_2 des Schemas (O, O_1, O_2 mögen dabei bzw. in O^*, O_1^*, O_2^* übergehen), wobei im Falle von A_1 oder UEA auszerdem in $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$) vorkommende X durch $\mathfrak{M}$ ersetzt werden sollen ($\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ mögen dabei dann bzw. in $\mathfrak{D}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{A}^*$ übergehen); nun geht U^* mittels desselben Schemas, ev. unter Ersetzung von $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{D}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{A}^*$, aus der abgeänderten Obersequenz O^* oder den abgeänderten Obersequenzen O_1^*, O_2^* hervor.

In einer Ableitungsreihe können wir also die erste Anwendung einer von einer Einsetzung in P oder Q verschiedenen Einsetzung nach oben verschieben; dies braucht nur endlich viele Male wiederholt zu werden, damit nur Einsetzungen in P oder Q übrig bleiben. Man wiederholt das Verfahren für eine ev. vorkommende zweite Anwendung der Einsetzungsregel, u.s.w. Schlieszlich sind dann alle Einsetzungen der Reihe in Einsetzungen in P oder Q verwandelt, während doch die Endsequenz dieselbe geblieben ist.

2° Ist etwa $\mathfrak{D}$ eine Abkürzung von $A \cdot (B \cdot C)$, $\mathfrak{A}$ von $G \cdot (H \subset J)$, so soll $\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}$, nach Definition, eine Abkürzung von

$$[\{A \cdot (B \cdot C)\} \cdot \{A \cdot (B \cdot C)\}] \cdot \{G \cdot (H \subset J)\}$$

sein. Mit P, UES, A_1, A_3 [62]) leitet man ab:

$$\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A} \to \{[\{[\{A \cdot (B \cdot C)\} \cdot A] \cdot (B \cdot C)\} \cdot G] \cdot (H \subset J)\}$$

[62]) Oder mit den Sätzen 1—5.

und ebenso, umgekehrt,

$$\{[\{[\{A \cdot (B \cdot C)\} A] \cdot (B \cdot C)\} \cdot G] \cdot (H \subset J)\} \rightarrow (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}).$$

Allgemein folgt aus P, UES, A_1—A_4:

Ist $\mathfrak{D}_1$ ein Produkt (eine Konjunktion) von n_1 Faktoren (Kalkülformeln) $\mathfrak{E}_1^{(p_1)}$ $(p_1 = 1, 2, \ldots, n_1)$, $\mathfrak{D}_2$ von n_2 Faktoren $\mathfrak{E}_2^{(p_2)}$ $(p_2 = 1, 2, \ldots, n_2), \ldots, \mathfrak{D}_m$ von n_m Faktoren $\mathfrak{E}_m^{(p_m)}$ $(p_m = 1, 2, \ldots, n_m)$, so läszt sich ableiten:

$$(\alpha) \ldots \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_m \rightarrow (\mathfrak{E}_1^{(1)} \cdot \mathfrak{E}_1^{(2)} \ldots \mathfrak{E}_1^{(n_1)} \cdot \mathfrak{E}_2^{(1)} \cdot \mathfrak{E}_2^{(2)} \ldots \mathfrak{E}_2^{(n_2)} \ldots \mathfrak{E}_m^{(1)} \cdot \mathfrak{E}_m^{(2)} \ldots \mathfrak{E}_m^{(n_m)}),$$

und

$$(\beta) \ldots \mathfrak{E}_1^{(1)} \cdot \mathfrak{E}_1^{(2)} \ldots \mathfrak{E}_1^{(n_1)} \ldots \mathfrak{E}_m^{(1)} \cdot \mathfrak{E}_m^{(2)} \ldots \mathfrak{E}_m^{(n_m)} \rightarrow (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_m).$$ [63])

Auszerdem behalten die Sequenzen (α) und (β) ihre Gültigkeit, wenn man (eins oder mehrere Male) ohne die Ordnung zu ändern zwei oder mehrere aufeinander folgende Faktoren $\mathfrak{E}_j^{(k)}$ zu einer Formel zusammenfaszt; ebenso wenn man die Ordnung der Faktoren $\mathfrak{E}_j^{(k)}$ willkürlich ändert, oder von Formeln $\mathfrak{E}_j^{(k)}$ von gleicher Gestalt eine oder mehrere, doch nicht alle, fortläszt.

Daraus folgt u.a., dasz der Umfang des Kalküls LG_1 ungeändert bleibt, *wenn wir von nun an das Schluszschema A_3 wie folgt lesen*:

Schema A_3. Vertauschung im Antezedens:

$$\frac{\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{k_1} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_{k_2} \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{k_1} \cdot \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_{k_2} \rightarrow \mathfrak{B}}$$

(die $\mathfrak{A}_j$ und $\mathfrak{C}_j$ dürfen teilweise oder alle fehlen).

Mit Schema A_3 allein folgt nun aus Schema P und Einsetzungsregel, dasz in jedem Produkt die Ordnung der Faktoren willkürlich geändert werden darf, d.h. ist $j_1, j_2, \ldots, j_n$ eine Permutation von $1, 2, 3, \ldots, n$, so gilt

$$\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_n \rightarrow (\mathfrak{D}_{j_1} \cdot \mathfrak{D}_{j_2} \ldots \mathfrak{D}_{j_n}) \text{ und } \mathfrak{D}_{j_1} \cdot \mathfrak{D}_{j_2} \ldots \mathfrak{D}_{j_n} \rightarrow (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_n),$$

oder

$$\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}_{j_1} \cdot \mathfrak{D}_{j_2} \ldots \mathfrak{D}_{j_n}.$$

Die in Fuszn. 63 *angegebene abgekürzte Schreibweise lassen wir von nun an nur für Antezedentia von Sequenzen zu* (siehe 4°).

---

[63]) $\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_m$ ist dabei eine Abkürzung von $(\ldots(((\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2) \cdot \mathfrak{D}_3) \cdot \mathfrak{D}_4) \ldots) \cdot \mathfrak{D}_m$; analog das Produkt der $\mathfrak{E}_j^{(p_j)}$ $(j = 1, \ldots, m;\ p_j = 1, 2, \ldots, n_j)$. Ein Produkt enthält mindestens einen Faktor. — Für die in § 32^{bis} folgenden Anwendungen ist es wichtig zu bemerken, dasz, während $\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n$ eine Abkürzung für *eine* bestimmte Formel ist (bei gegebenen $\mathfrak{A}_j$), jedoch umgekehrt eine gegebene Formel sich oft auf *mehrere* Weisen abkürzen läszt; Beispiel: $[\{(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3\} \cdot A_4]$ hat die Abkürzungen: $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$; $(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 \cdot A_4$; $\{(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3\} \cdot A_4$ oder $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \cdot A_4$, und sich selbst. Siehe die Verabredungen unter 4°, welche dazu dienen die hierdurch entstehenden Schwierigkeiten zu entgehen.

Mit dem neuen Schema A_3 beweist man leicht, dasz A_1 sich in folgender Weise erweitern läszt:

Schema A_1 Verdünnung im Antezedens: $\dfrac{\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}}$,

und dasz daneben A_2 die Erweiterung:

Schema A_2. Zusammenziehung im Antezedens: $\dfrac{\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}}$

hat. *Von nun an wollen wir die Schemata A_1 und A_2 in der eben gegebenen Form lesen.*

Das Schema A_3 führt ebenso zu folgenden Erweiterungen:

Schema UEA. $\dfrac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_n \to \mathfrak{C}}{(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_n \to \mathfrak{C}}$ und $\dfrac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_n \to \mathfrak{C}}{(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_n \to \mathfrak{C}}$;

(die $\mathfrak{D}_j$ dürfen fehlen);

und:

Schema FES. $\dfrac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n \to \mathfrak{C}}{\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n \to (\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C})}$;

auch:

Schema FEA. $\dfrac{\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_n \to \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}_2 \ldots \mathfrak{E}_m \to \mathfrak{C}}{(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_n \cdot \mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}_2 \ldots \mathfrak{E}_m \to \mathfrak{C}}$

(die $\mathfrak{E}_j$ dürfen fehlen).

Von nun an wollen wir UEA, FES und FEA in dieser Form lesen.

In UES lassen wir abgekürzte Formen für das Antezedens zu. In P und Q sollen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{A}$ immer in nicht-abgekürzter Form gemeint sein. Aus 4° geht hervor, dasz nachherige Überführung der Antezedentia in abgekürzte Formen möglich ist.

3° *Das Schluszschema A_4 läszt sich durch folgendes Mischungsschema M ersetzen:*

Schema M. Mischung: $\dfrac{\overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{B} \qquad \overline{\mathfrak{C}} \to \mathfrak{D}}{\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \to \mathfrak{D}}$

[$\overline{\mathfrak{C}}$ ein Produkt $\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 \ldots \mathfrak{D}_n$ ($n \geqq 1$), in welchem mindestens einer der Faktoren $\mathfrak{D}_j$ ein $\mathfrak{B}$ ist; $\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*}$ entsteht aus $\overline{\mathfrak{C}}$ durch Fortlassung aller $\mathfrak{D}_j$ mit der Gestalt $\mathfrak{B}$, und Voranstellung der Faktoren von $\overline{\mathfrak{A}}$ in der Ordnung, in welcher sie in $\overline{\mathfrak{A}}$ auftreten]. [64])

$\mathfrak{B}$ wollen wir *die Mischformel* nennen.

M folgt aus A_4. Denn nach A_3 (wie unter 2°) und A_2 ist:

$$\mathfrak{B} \cdot (\overline{\mathfrak{C}^*}) \to \mathfrak{D}$$

---

[64]) Eine überstrichene deutsche Buchstabe wird als Produkt von Kalkülformeln aufgefaszt, deren Anzahl auch 1 sein darf; sie deutet somit eine Abkürzung an.

($\overline{\mathfrak{C}}^*$ aus $\overline{\mathfrak{C}}$ hervorgehend durch Fortlassung aller $\mathfrak{D}_j$ mit der Gestalt $\mathfrak{B}$). Anwendung von A_4 liefert:

$$(\overline{\mathfrak{A}}) \cdot (\overline{\mathfrak{C}}^*) \to \mathfrak{D},$$

woraus mit A_3 (unter 2°) die Untersequenz von M folgt.

Umgekehrt läszt sich jede Anwendung von A_4 auf Anwendung von M zurückführen.

4° Dasz eine Obersequenz $\mathfrak{P} \to \mathfrak{B}$ eines Schluszschemas, wobei das Antezedens eine abgekürzte Formel (eine Konjunktion) mit $n\ (\geqq 2)$ Faktoren, sich auf mehrere Weisen auffassen läszt (siehe die Definitionen in § 17 u. Fuszn. 63), verursacht dasz die Untersequenz oft mehrere Formen haben kann. Um dies von nun an zu vermeiden denken wir uns *die Faktorzerlegung eines derartigen Antezedens immer unzweideutig bestimmt; Übergang zu weiteren Faktorzerlegungen soll nur mittels der Schemata* (in der unter 2° u. 3° angegebenen Form) *zugelassen sein*. Diese genügen dazu; denn mit ihnen sind folgende Schemata ableitbar: [64bis])

FaA. (1) $$\frac{\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_k \ldots \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}}{(\ldots(((\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2) \cdot \mathfrak{A}_3) \cdot \mathfrak{A}_4) \ldots \mathfrak{A}_k) \ldots \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}};$$

(2) $$\frac{(\ldots((\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2) \cdot \mathfrak{A}_3) \ldots \mathfrak{A}_k) \ldots \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_k \ldots \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}}$$
$(n \geqq 2;\ 1 < k \leqq n)$

(„Faktoränderung" im Antezedens).

§ 32bis. *Jede (affirmative) Sequenz $v \to \mathfrak{A}$, bei der $\mathfrak{A}$ v nicht enthält, läszt sich (in LG_1) ohne Benutzung von Schema Q ableiten; dazu genügt eine Sequenzenreihe, bei der:*

I. *am Anfang jeder auftretenden Sequenz $v \to$ steht;*

II. *in jeder solchen Sequenz $v \to \mathfrak{B}$ die Formel $\mathfrak{B}$ v nicht enthält;*

III. *die ausschlieszliche Anwendung der Schluszschemata $\overline{P}$, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{M}$, $\overline{UES}$, $\overline{UEA}$, $\overline{FES}$, $\overline{FEA}$, die bzw. aus $P, A_1, \ldots, FEA$ dadurch hervorgehen [65]), dasz in jeder Ober- und Untersequenz $\to$ in $\subset$ geändert, und dabei $v \to$ vor der Sequenz gesetzt wird, zu $v \to [(X_n \subset X_n) \subset \mathfrak{A}]$ führt (mit X_n nicht in $\mathfrak{A}$ vorkommend); Einsetzungen bleiben dabei auf solche in $\overline{P}$ beschränkt;* [66])

IV. *der letzte Schlusz von $v \to [(X_n \subset X_n) \subset \mathfrak{A}]$ zu $v \to \mathfrak{A}$ führt; hier wird somit das Abtrennungsschema:*

$$\frac{v \to \mathfrak{A} \quad v \to (\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B})}{v \to \mathfrak{B}}$$

angewandt.

Nun können wir den Hauptsatz für LG_1 formulieren.

[64bis]) FaA (1) mit UEA, A_2, A_3; FaA (2) mit P, UES, $A_1 - A_3$ und M.

[65]) $A_1, - A_3$, UEA, FES, FEA in erweiterter Form, UES mit-, P ohne Abkürzungen als Antezedens.

[66]) Siehe Satz 12; vergl. Fuszn. 16.

Hauptsatz. *Zu jeder Sequenz* $\nu \to \mathfrak{A}$, *bei der* $\mathfrak{A}$ ν *nicht enthält* [67]), *gibt es*, wie wir sahen, *eine Herleitungsreihe mit den Eigenschaften I—IV. Diese Reihe läszt sich derart umwandeln, dasz die Eigenschaften I, II, IV erhalten bleiben, während unter III* $\overline{M}$ *gestrichen werden kann.*

Neben Schema $\overline{Q}$ (Q) sind somit Schnittschema $\overline{A}_4(A_4)$ und Mischungsschema $\overline{M}(M)$ überflüssig [68]).

Beweis [69]). Es genügt zu zeigen, dasz eine beliebige Herleitungsreihe mit den Eigenschaften I—IV, deren letztes Schluszschema eine Mischung $\overline{M}$ ist, während sie keine weiteren Mischungen enthält, sich so umwandeln läszt, dasz die Untersequenz der Mischung ohne $\overline{M}$ hergeleitet wird, und der übrige Teil der Herleitung ungeändert bleibt.

Grad einer Kalkülformel ist die Anzahl der in ihr vorkommenden logischen Zeichen. Als *Grad der eben genannten Herleitungsreihe* bezeichnen wir den Grad der Mischformel $\mathfrak{B}$ in $\overline{M}$.

Rang ϱ *der Herleitungsreihe* ist die Summe der rechten und linken Rangzahl; dabei ist die linke [rechte] Rangzahl die gröszte Anzahl von in einem Faden aneinander anschlieszenden Sequenzen, deren unterste die linke [rechte] Obersequenz der Mischung ist, und von denen jede im Sukzedens [Antezedens] die Mischformel allein [als Faktor einer abgekürzten Formel oder allein] enthält.

Der mindest mögliche Rang ist 2.

Der Beweis geschieht mittels vollständiger Induktion.

Man beweist den Satz für den Grad γ unter Voraussetzung, dasz sie für Grade $< \gamma$ (falls es solche gibt) schon gültig ist. Ferner wird zunächst der Fall $\varrho = 2$ behandelt, darauf der Fall $\varrho > 2$ unter Voraussetzung, dasz der Satz für Herleitungen desselben Grades, jedoch kleineren Ranges schon bekannt ist.

Es sei $\varrho = 2$. Wir unterscheiden eine Anzahl von Einzelfällen:

a) Die linke Obersequenz der Mischung sei durch Einsetzung in $\overline{P}$ entstanden. Dann lautet die Mischung:

$$\frac{\nu \to (\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}) \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \to (\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \mathfrak{D})} \quad (\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \text{ ist die mit } \mathfrak{B} \text{ als Anfangsfaktor erweiterte Konjunktion } \overline{\mathfrak{C}^*}).$$

Sie läszt sich umwandeln zu:

$$\frac{\nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \to (\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \mathfrak{D})} \quad (\overline{A}_3,\ \overline{A}_2) \text{ (ev. mehrmalig anzuwenden).}$$

---

[67]) Ihre Klasse ist dieselbe wie die der HEYTINGschen Theoreme von § 1, Bemerkung III.

[68]) Dadurch ist $X_n \subset X_n$ die einzige Kalkülformel, welche beim Verfahren des Hauptsatzes wieder völlig eliminiert werden kann; von Konjunktionen in einer Obersequenz einer unter III zugelassen gebliebenen Schluszfigur treten alle durch deutsche Buchstaben angegebenen Kalkülformeln als Teilformeln der in der Untersequenz $\nu \to \boldsymbol{R}$ auftretenden Formel $\boldsymbol{R}$ auf.

[69]) Vergl. GENTZEN, loc. cit. 8), S. 197—210.

Das ist bereits eine Herleitung ohne Mischung; $\nu \rightarrow (\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B})$ ist überflüssig geworden.

β) Die rechte Obersequenz der Mischung sei durch Einsetzung in $\overline{P}$ entstanden:

$$\frac{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \quad \nu \rightarrow (\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B})}{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B})}.$$

Die Mischung ist überflüssig.

γ) Keine Obersequenz der Mischung sei aus $\overline{P}$ durch Einsetzung entstanden. Dann sind beide Untersequenz von Schluszschemata, und wegen $\varrho = 2$ kommt die Mischformel $\mathfrak{B}$ nicht im Sukzedens der Obersequenz(en) des linken Schluszschemas und nicht im Antezedens der Obersequenz(en) des rechten Schluszschemas vor.

Wir haben nun die folgenden Möglichkeiten:

γ_1) Die rechte Obersequenz der Mischung ist Untersequenz einer Verdünnung $\overline{A}_1$:

$$\frac{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \dfrac{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \rightarrow (\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{D})}\ (\overline{A}_1)}{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{D})}\ (\overline{M})$$

($\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}$ ist die Konjunktion $\overline{\mathfrak{P}}$ erweitert durch Voranstellung der Faktoren von $\overline{\mathfrak{A}}$ in gleicher Anordnung wie in $\overline{\mathfrak{A}}$).

Dies ist zu ersetzen durch:

$$\frac{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{D})}\ (\overline{A}_1);$$

$\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B})$ ist nun überflüssig.

γ_2) Die Mischformel $\mathfrak{B}$ habe die Form $(\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2)$; sie sei nicht eingeführt wie unter γ_1. Die rechte Obersequenz der Mischung kann nur aus $\overline{UEA}$ hervorgegangen sein:

$$\frac{\dfrac{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}_1) \quad \nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}_2)}{\nu \rightarrow [\overline{\mathfrak{A}} \subset (\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2)]}\ (\overline{UES}) \qquad \dfrac{\nu \rightarrow (\mathfrak{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \rightarrow [(\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2) \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D}]}\ (\overline{UEA})}{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}\ (\overline{M})$$

($\overline{\mathfrak{C}}$ darf fehlen).

Dies läszt sich ersetzen durch:

$$\frac{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}_1) \quad \nu \rightarrow (\mathfrak{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}\ (\overline{M}).$$

Da der Grad der neuen Mischung niedriger als der der ursprünglichen ist, läszt sie sich, nach Annahme, entfernen [70]).

γ_3) Die Mischformel $\mathfrak{B}$ kann auch die Gestalt $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ haben; sie sei

[70]) Angenommen wurde, dasz $\overline{\mathfrak{C}}$ nicht den Faktor $\mathfrak{B}_1$ enthält; sonst ist Anwendung von $\overline{M}$ „und" $\overline{A}_1$, $\overline{A}_3$ notwendig. — Die Umwandlung ist analog falls $\nu \rightarrow (\mathfrak{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})$ gegeben ist anstatt $\nu \rightarrow (\mathfrak{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})$.

wieder nicht eingeführt wie unter γ_1. Dann ist das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\nu \to [\mathfrak{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}_2]}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \subset (\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2)]}\,(\overline{FES}) \qquad \dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{B}_1) \quad \nu \to (\mathfrak{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C})}{\nu \to [(\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2) \cdot \overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{FEA})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C}] \qquad (\overline{\mathfrak{E}} \text{ darf fehlen}).}\,(\overline{M})$$

Es läszt sich umwandeln zu:

$$\dfrac{\nu \to [\mathfrak{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}_2] \quad \nu \to (\mathfrak{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C})}{\nu \to [\mathfrak{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C}]^{71)}}\,(\overline{M})$$

und

$$\dfrac{\dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{B}_1) \quad \nu \to [\mathfrak{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C}]}{\nu \to [\overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C}]^{72)}}\,(\overline{M})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{A}_3).$$

Die Mischformeln $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ der beiden letzten Mischungen sind von kleinerem Grade als $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$. Nach der Induktionsannahme sind sie somit zu beseitigen.

Es sei $\varrho > 2$.

I. *Die rechte Rangzahl sei gröszer als* 1 (d.h. die rechte Obersequenz der Mischung ist Untersequenz einer Schluszfigur $\mathfrak{Sf}$, welche die Mischformel $\mathfrak{B}$ im Antezedens von mindestens einer Obersequenz enthält).

Der Grundgedanke des Umwandlungsverfahrens ist, wie bei GENTZEN, loc. cit. S. 203, folgender:

Falls die Mischung sich nicht sofort wegschaffen läszt, so wird sie zurückgeführt auf die Erledigung von Herleitungen des *gleichen Grades*, aber *kleineren Ranges*. Meistens genügt dazu dasz man die Mischung sozusagen um eine Stufe nach oben verschiebt, über die Schluszfigur $\mathfrak{Sf}$ hinweg, genau gesagt: Die linke Obersequenz der Mischung $\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}]$, die zunächst neben der Untersequenz von $\mathfrak{Sf}$ steht, wird statt dessen neben die Obersequenzen von $\mathfrak{Sf}$ geschrieben, welche nun Obersequenzen von neuen Mischungen werden; und die Untersequenzen dieser Mischungen dienen dann als Obersequenzen einer neuen, an Stelle von $\mathfrak{Sf}$ tretenden Schluszfigur, durch die wir sofort oder nach Zufügung weiterer Schluszfiguren wieder zu der alten Endsequenz gelangen. Zu den neuen Mischungen gehört nun offenbar jeweils ein Rang, der kleiner als ϱ ist, denn die linke Rangzahl bleibt ungeändert, und die rechte vermindert sich um mindestens 1.

Wir unterscheiden die beiden Fälle:

---

71) Hier wurde angenommen, dasz die Faktoren von $\overline{\mathfrak{E}}$ nicht die Gestalt $\mathfrak{B}_2$ haben; im entgegengesetzten Fall wird diese Sequenz erst mittels $\overline{M}$, $\overline{A}_1$ und $\overline{A}_3$ erreicht.

72) Enthält $\overline{\mathfrak{A}}$ oder (und) $\overline{\mathfrak{E}}$ Faktoren mit der Gestalt $\mathfrak{B}_1$, so fordert Ableitung dieser Sequenz auch noch Anwendung von $\overline{A}_1$ und $\overline{A}_3$.

a. Die Mischformel $\mathfrak{B}$ komme im Antezedens $\overline{\mathfrak{A}}$ der linken Obersequenz der Mischung vor. Das Ende der Herleitung lautet:

$$\frac{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}] \quad \nu \to [\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D}]}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \mathfrak{D}]}.$$

Diese Mischung läszt sich wegschaffen:

$$\frac{\nu \to [\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D}]}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \mathfrak{D}]} \; (\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \overline{A}_3) \text{ (ev. mehrmalig anzuwenden).}$$

b. $\mathfrak{B}$ komme im Antezedens $\overline{\mathfrak{A}}$ der linken Obersequenz der Mischung nicht vor. Wir haben nun die folgende Unterteilung dieses Falles:

b_1. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ sei ein $\overline{A}_1$ oder $\overline{A}_2$ oder $\overline{A}_3$. Das Ende der Herleitung hat die Form:

$$\frac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \quad \dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \mathfrak{D}]} \; \begin{array}{l} (\mathfrak{S}\mathfrak{f}) \text{ (} \overline{\mathfrak{E}} \text{ und } \overline{\mathfrak{C}} \text{ enthalten den Faktor } \mathfrak{B}) \\ (\overline{M}). \end{array}$$

Die Umwandlung fängt dann an mit:

$$\frac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \quad \nu \to (\overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{D}]} \; (\overline{M}).$$

Die Herleitung für die Untersequenz der neuen Mischung hat dieselbe linke Rangzahl wie die alte Herleitung, während ihre rechte Rangzahl um 1 kleiner ist. Nach der Induktionsannahme ist nun auch die neue Mischung wegzuschaffen.

Auf die neue Mischung kann noch Anwendung von $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ und (oder) $\overline{A}_3$ folgen.

b_2. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ sei ein von $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ verschiedenes Schluszschema mit einer Obersequenz, also $\overline{UEA}$ oder $\overline{FES}$. Das Ende der Herleitung lautet dann:

$$\frac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \dfrac{\nu \to (\mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C})}{\nu \to [(\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F}) \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C}]}}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F}) \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}] \text{ oder } \nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}],} \; \begin{array}{l} (\overline{UEA}) \\ (\overline{M}) \end{array}$$

je nachdem $(\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F})$ von $\mathfrak{B}$ verschieden ist oder nicht;

oder:

$$\frac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \dfrac{\nu \to (\mathfrak{F} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C})}{\nu \to [(\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F}) \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C}]}}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F}) \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}] \text{ oder } \nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}],} \; \begin{array}{l} (\overline{UEA}) \\ (\overline{M}) \end{array}$$

je nachdem $(\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F})$ von $\mathfrak{B}$ verschieden ist oder nicht;

oder:

$$\frac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \quad \dfrac{\nu \to (\mathfrak{C} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{E}} \subset (\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D})]}}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset (\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D})]} \; \begin{array}{l} (\overline{FES}) \\ (\overline{M}). \end{array}$$

In den drei Fällen enthält $\overline{\mathfrak{E}}$ $\mathfrak{B}$ als Faktor.

Beschränken wir uns für die zugehörigen Umwandlungen auf den ersten Fall. Für $(\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F})$ von $\mathfrak{B}$ verschieden sind sie:

$$\cfrac{\cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \nu \to (\mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C})}{\begin{array}{c}\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}) \text{ oder } \nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}),\\ \text{je nachdem } \mathfrak{D} \text{ von } \mathfrak{B} \text{ verschieden ist oder nicht}\end{array}}\,(\overline{M})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F}) \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{A_1}, \overline{A_3}, \overline{UEA}),$$

und für $(\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F})$ und $\mathfrak{B}$ von gleicher Gestalt:

$$\cfrac{\cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \nu \to (\mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{C})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{M})}{\nu \to [\mathfrak{D} \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{A_3})}{\nu \to [\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{UEA})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{M})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{E}^*} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{A_3}, \overline{A_2}).$$

In den neuen Mischungen ist die rechte Rangzahl kleiner als ursprünglich; nach der Induktionsannahme sind diese neuen Mischungen fortzuschaffen.

b_3. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ sei ein Schluszschema mit zwei Obersequenzen, also $\overline{UES}$ oder $\overline{FEA}$. Das Ende der Herleitung lautet für $\overline{UES}$:

$$\cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{D}) \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{C})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{G}} \subset (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C})]}\,(\overline{UES})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \subset (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C})]}\,(\overline{M}),$$

und für $\overline{FEA}$:
entweder

$$\cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{F}) \qquad \nu \to (\mathfrak{E} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{C})}{\nu \to [(\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}) \cdot \overline{\mathfrak{G}} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{FEA})}{\begin{array}{l}\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot (\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}) \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \cdot \overline{\mathfrak{D}^*} \subset \mathfrak{C}] \text{ oder } \nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \cdot \overline{\mathfrak{D}^*} \subset \mathfrak{C}], \quad (\overline{\mathfrak{D}} \text{ darf fehlen})\\ \text{je nachdem } \mathfrak{F} \subset \mathfrak{E} \text{ und } \mathfrak{B} \text{ verschiedene Gestalt haben oder nicht;}\end{array}}\,(\overline{M})$$

oder

$$\cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{F}) \qquad \nu \to (\mathfrak{E} \cdot \overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{C})}{\nu \to [(\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}) \cdot \overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{FEA})}{\begin{array}{r}\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot (\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}) \cdot \overline{\mathfrak{D}^*} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \subset \mathfrak{C}] \text{ oder } \nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{D}^*} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \subset \mathfrak{C}], \text{ je nachdem}\\ \mathfrak{F} \subset \mathfrak{E} \text{ und } \mathfrak{B} \text{ verschiedene Gestalt haben oder nicht.}\end{array}}\,(\overline{M})$$

In diesen Fällen enthält $\overline{\mathfrak{G}}$ $\mathfrak{B}$ als Faktor.

Die zugehörigen Umwandlungen sind für den ersten Fall:

$$\cfrac{\cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \subset \mathfrak{D})}\,(\overline{M}) \qquad \cfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{C})}{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \subset \mathfrak{C})}\,(\overline{M})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \subset (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C})]}\,(\overline{UES}).$$

Im zweiten Fall gibt es verschiedene Möglichkeiten: 1. $\overline{\mathfrak{D}}$ enthält $\mathfrak{B}$ nicht, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}$ ist von $\mathfrak{B}$ verschieden; hier genügt *eine* Mischung kleineren Ranges, 2. $\overline{\mathfrak{D}}$ enthält den Faktor $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}$ haben verschiedene Gestalt; nun genügen *zwei* Mischungen kleineren Ranges, 3. $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ haben dieselbe Gestalt, während $\overline{\mathfrak{D}}$ keinen Faktor $\mathfrak{B}$ enthält; die Umwandlungen enthalten *zwei* Mischungen kleineren Ranges:

$$\dfrac{\dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{F})}{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \subset \mathfrak{F})}\,(\overline{M}) \qquad \nu \to (\mathfrak{E} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{C})}{\nu \to [(\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}) \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{FEA})$$

oder

$$\dfrac{\dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \nu \to [\mathfrak{B} \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{C}]}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{M})}{\nu \to [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{G}^*} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{C}]}\,(\overline{A}_3,\ \overline{A}_2).$$

4. $\overline{\mathfrak{D}}$ enthält $\mathfrak{B}$ als Faktor, während $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ dieselbe Gestalt haben; Umwandlungen mit *drei* Mischungen kleineren Ranges. Auch im dritten Fall hat man dieselben Möglichkeiten zu berücksichtigen wie im zweiten.

II. *Die rechte Rangzahl sei* 1, *also die linke gröszer als* 1.

c. Die Mischformel $\mathfrak{B}$ komme im Antezedens $\overline{\mathfrak{A}}$ der linken Obersequenz der Mischung vor; die Mischung läszt sich wegschaffen wie unter *a*.

d. Der zu *c* entgegengesetzten Fall führt zu folgender Unterteilung:

d_1. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ sei ein $\overline{A}_1$ oder $\overline{A}_2$ oder $\overline{A}_3$. Das Ende der Herleitung ist nun:

$$\dfrac{\dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{B})}{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B})}\,(\mathfrak{S}\mathfrak{f}) \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \mathfrak{D})}\,(\overline{M}).$$

Es ist umzuwandeln zu:

$$\dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \to (\overline{\mathfrak{E}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \mathfrak{D})}\,(\overline{M})$$

mit darauf folgender Anwendung des zugehörigen Schemas $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$.

Die neue Mischung ist kleineren Ranges als die ursprüngliche, somit wegzuschaffen.

d_2. Ist $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ ein von $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ verschiedenes Schluszschema mit *einer* Obersequenz, so kann dies nur $\overline{UEA}$ sein; der eine von beiden Fällen erhält die Form:

$$\dfrac{\dfrac{\nu \to [\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{B}]}{\nu \to [(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{F}) \cdot \overline{\mathfrak{E}} \subset \mathfrak{B}]}\,(\overline{UEA}) \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \to [(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{F}) \cdot \overline{\mathfrak{E}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \mathfrak{D}]}\,(\overline{M}).$$

Umwandlung liefert:

$$\dfrac{\dfrac{\nu \to [\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \supset \mathfrak{B}] \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \supset \mathfrak{D})}{\nu \to [\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{E}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \supset \mathfrak{D}]}\,(\overline{M})}{\nu \to [(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{F}) \cdot \overline{\mathfrak{E}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \supset \mathfrak{D}]}\,(\overline{UEA}).$$

Der Rang ist erniedrigt.

d_3. Als Schluszfigur $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ mit zwei Obersequenzen ist nur $\overline{FEA}$ möglich:

$$\dfrac{\dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \supset \mathfrak{F}) \qquad \nu \to (\mathfrak{E} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \supset \mathfrak{B})}{\nu \to [(\mathfrak{F} \supset \mathfrak{E}) \cdot \overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \supset \mathfrak{B}]}\,(\overline{FEA}) \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{G})}{\nu \to [(\mathfrak{F} \supset \mathfrak{E}) \cdot \overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{A}^*} \supset \mathfrak{G}]}\,(\overline{M}).$$

Hier ist die Umwandlung:

$$\dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \supset \mathfrak{F}) \qquad \dfrac{\nu \to (\mathfrak{E} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \supset \mathfrak{B}) \qquad \nu \to (\overline{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{G})}{\nu \to (\mathfrak{E} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{A}^*} \supset \mathfrak{G})}\,(\overline{M})}{\nu \to [(\mathfrak{F} \supset \mathfrak{E}) \cdot \overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{A}^*} \supset \mathfrak{G}]}\,(\overline{FEA}).$$

Wieder ist der Rang erniedrigt.

Nähere Betrachtung der logistischen Kalküle LG_2, LM, LI und LK

§ 33. Für die Kalküle LG_2, LM, LI und LK gelten gleichartige Bemerkungen wie für LG_1 (§ 32):

1° *Die Einsetzungsregel kann für LG_2 und LM auf Einsetzungen in P und Q, für LI auf solche in P, Q, R, für LK auf solche in P, Q, R, S beschränkt bleiben.*

2° *Die in § 32, 2° getroffenen Verabredungen sollen auch für LG_2, LM, LI und LK erhalten bleiben.*

3° *Das Schema A_4 ersetzen wir auch in diesen Kalkülen durch das Mischungsschema M*, was wieder erlaubt ist (siehe § 32, 3°).

4° *Auch § 32, 4° wollen wir gelten lassen.*

Hinzu kommt:

5° *In den Schemata R und S soll $\mathfrak{A}$ in nicht-abgekürzter Form gemeint sein.*

6° Mit Schema A_3 beweist man leicht, *dasz wir in LG_2, LM, LI und LK fortan lesen dürfen:*

Schema OEA. $$\dfrac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{D}}{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{D} \qquad \text{(die } \mathfrak{C}_i \text{ dürfen fehlen)}};$$

auch wollen wir lesen (vergl. § 32, 4°):

Schema OES. $$\dfrac{\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{A}}{\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n \to (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})} \quad \text{und} \quad \dfrac{\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n \to (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}.$$

Ebenso folgt mit Schema A_3, *dasz wir in LM, LI und LK fortan lesen dürfen*:

Schema NES. $\dfrac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_n \rightarrow \lambda}{\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n \rightarrow \mathfrak{A}'}$; Schema NEA. $\dfrac{\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n \rightarrow \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_n \rightarrow \lambda}$.

§ 33[1]. *In LG_2 läszt sich jede (affirmative) Sequenz $\nu \rightarrow \mathfrak{A}$, bei der $\mathfrak{A}$ ν nicht enthält, ohne Benutzung von Schema Q ableiten; dazu genügt eine Sequenzenreihe, bei der:*

I. *am Anfang jeder auftretenden Sequenz $\nu \rightarrow$ steht;*

II. *in jeder solchen Sequenz $\nu \rightarrow \mathfrak{B}$ die Formel $\mathfrak{B}$ ν nicht enthält;*

III. *die ausschlieszliche Anwendung der Schluszschemata $\overline{P}$, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{M}$, $\overline{UES}$, $\overline{UEA}$, $\overline{FES}$, $\overline{FEA}$, $\overline{OES}$, $\overline{OEA}$, die bzw. aus $P, A_1, \ldots, OEA$ dadurch hervorgehen, dasz in jeder Ober- und Untersequenz $\rightarrow$ in $\subset$ geändert, und dabei $\nu \rightarrow$ vor der Sequenz gesetzt wird, zu $\nu \rightarrow [(X_n \subset X_n) \subset \mathfrak{A}]$ führt (mit X_n nicht in $\mathfrak{A}$ vorkommend); Einsetzungen bleiben dabei auf solche in $\overline{P}$ beschränkt;* [73])

IV. *der letzte Schlusz von $\nu \rightarrow [(X_n \subset X_n) \subset \mathfrak{A}]$ und $\nu \rightarrow (X_n \subset X_n)$ zu $\nu \rightarrow \mathfrak{A}$ führt; nur hier wird das Abtrennungsschema $\overline{A}$ angewandt.*

Der Hauptsatz für LG_2 lauter nun:

Zu jeder Sequenz $\nu \rightarrow \mathfrak{A}$, bei der $\mathfrak{A}$ ν nicht enthält [74]), *gibt es eine Herleitungsreihe mit den obigen Eigenschaften I—IV, wobei jedoch unter III die Mischungsregel $\overline{M}$ fortfällt.*

Der Beweis ist eine Erweiterung des Beweises für den Hauptsatz in LG_1.

Zu den Fällen γ_1—γ_3 kommt:

Fall γ_4. Die Mischformel $\mathfrak{B}$ hat die Form $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$; sie sei nicht eingeführt wie unter γ_1. Das Ende der Herleitung ist in dem einen der zwei möglichen Fälle (beide mit $\overline{OES}$ und $\overline{OEA}$):

$$\cfrac{\cfrac{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{B}_1)}{\nu \rightarrow [\overline{\mathfrak{C}} \subset (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2)]}\,(\overline{OES}) \qquad \cfrac{\nu \rightarrow (\mathfrak{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{E}) \quad \nu \rightarrow (\mathfrak{B}_2 \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{E})}{\nu \rightarrow [(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2) \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{E}]}\,(\overline{OEA})}{\nu \rightarrow [\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{E}] \qquad (\overline{\mathfrak{D}} \text{ darf fehlen})}\,(\overline{M})$$

Die Umwandlung liefert:

$$\frac{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{B}_1) \quad \nu \rightarrow (\mathfrak{B}_1 \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{E})}{\nu \rightarrow [\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{E}]}\,(\overline{M}),$$

falls $\overline{\mathfrak{D}}$ keinen Faktor $\mathfrak{B}_1$ enthält; kommt $\mathfrak{B}_1$ als Faktor in $\overline{\mathfrak{D}}$ vor, so musz nach $\overline{M}$ noch $\overline{A}_1$ und $\overline{A}_3$ folgen. Der Grad der Mischung ist erniedrigt.

Im Falle b_2 gibt es nun auch noch zwei gleichartige Möglichkeiten mit $\overline{OES}$, deren eine ist:

$$\cfrac{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \cfrac{\nu \rightarrow (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{D})}{\nu \rightarrow [\overline{\mathfrak{C}} \subset (\mathfrak{D} + \mathfrak{E})]}\,(\overline{OES})}{\nu \rightarrow [\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset (\mathfrak{D} + \mathfrak{E})]}\,(\overline{M}).$$

[73]) Siehe Satz 12; vergl. die Fuszn. 16 u. 26.

[74]) Ihre Klasse ist dieselbe wie die der Heytingschen Theoreme von § 3, Bemerkung A.

Die Umwandlung ist:

$$\cfrac{\cfrac{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\subset\mathfrak B)\qquad \nu\to(\bar{\mathfrak C}\subset\mathfrak D)}{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak D)}\,(\bar M)}{\nu\to[\bar{\mathfrak A}\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset(\mathfrak D+\mathfrak E)]}\,(\overline{OES})$$

Im Falle b_3 kommt folgende Möglichkeit hinzu:

$$\cfrac{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\subset\mathfrak B)\qquad \cfrac{\nu\to(\mathfrak D\cdot\bar{\mathfrak C}\subset\mathfrak F)\qquad \nu\to(\mathfrak E\cdot\bar{\mathfrak C}\subset\mathfrak F)}{\nu\to[(\mathfrak D+\mathfrak E)\cdot\bar{\mathfrak C}\subset\mathfrak F]}\,(\overline{OEA})}{\nu\to[\bar{\mathfrak A}\cdot(\mathfrak D+\mathfrak E)\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F]\ \text{oder}\ \nu\to[\bar{\mathfrak A}\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F],\ \text{je nachdem}\ \mathfrak D+\mathfrak E\ \text{und}\ \mathfrak B\ \text{verschiedene Gestalt haben oder nicht.}}\,(\bar M)$$

Umwandlung, mit Rangerniedrigung, für den Fall dasz $\mathfrak D+\mathfrak E$ und $\mathfrak B$ verschieden sind:

$$\cfrac{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\subset\mathfrak B)\qquad \nu\to(\mathfrak D\cdot\bar{\mathfrak C}\subset\mathfrak F)}{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\cdot\mathfrak D\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F);\ \text{oder:}\ \cfrac{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F)}{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\cdot\mathfrak D\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F)}\,(\bar A_1,\ \bar A_3)}\,(\bar M)$$

$$\cfrac{\cfrac{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\subset\mathfrak B)\qquad \nu\to(\mathfrak E\cdot\bar{\mathfrak C}\subset\mathfrak F)}{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\cdot\mathfrak E\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F);\ \text{oder:}\ \cfrac{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F)}{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\cdot\mathfrak E\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F)}\,(\bar A_1,\ \bar A_3)}\,(\bar M)}{\nu\to[\bar{\mathfrak A}\cdot(\mathfrak D+\mathfrak E)\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F]}\,(\bar A_3,\overline{OEA}).$$

Für $\mathfrak D+\mathfrak E$ und $\mathfrak B$ von derselben Gestalt fängt man bei der Umwandlung wieder mit obigen Mischungen an und erreicht die letzte Sequenz $\nu\to[(\mathfrak D+\mathfrak E)\cdot\bar{\mathfrak A}\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F]$ oder $\nu\to[\mathfrak B\cdot\bar{\mathfrak A}\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F]$. Dann folgt die Mischung, deren rechte Rangzahl 1 ist:

$$\cfrac{\cfrac{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\subset\mathfrak B)\qquad \nu\to[\mathfrak B\cdot\bar{\mathfrak A}\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F]}{\nu\to[\bar{\mathfrak A}\cdot\bar{\mathfrak A}\cdot\overline{\mathfrak C^*}\cdot\subset\mathfrak F]}\,(\bar M)}{\nu\to(\bar{\mathfrak A}\cdot\overline{\mathfrak C^*}\subset\mathfrak F)}\,(\bar A_3,\ \bar A_2).$$

Im Fall d_3 kommt hinzu:

$$\cfrac{\cfrac{\nu\to(\mathfrak A\cdot\bar{\mathfrak D}\subset\mathfrak B)\qquad \nu\to(\mathfrak C\cdot\bar{\mathfrak D}\subset\mathfrak B)}{\nu\to[(\mathfrak A+\mathfrak C)\cdot\bar{\mathfrak D}\subset\mathfrak B]}\,(\overline{OEA})\qquad \nu\to(\bar{\mathfrak G}\subset\mathfrak H)}{\nu\to[(\mathfrak A+\mathfrak C)\cdot\bar{\mathfrak D}\cdot\overline{\mathfrak G^*}\subset\mathfrak H]\quad(\bar{\mathfrak D}\ \text{darf fehlen})}\,(\bar M).$$

Umwandlung mit Rangerniedrigung:

$$\cfrac{\cfrac{\nu\to(\mathfrak A\cdot\bar{\mathfrak D}\subset\mathfrak B)\qquad \nu\to(\bar{\mathfrak G}\subset\mathfrak H)}{\nu\to(\mathfrak A\cdot\bar{\mathfrak D}\cdot\overline{\mathfrak G^*}\subset\mathfrak H)}\,(\bar M)\qquad \cfrac{\nu\to(\mathfrak C\cdot\bar{\mathfrak D}\subset\mathfrak B\qquad \nu\to(\bar{\mathfrak G}\subset\mathfrak H)}{\nu\to(\mathfrak C\cdot\bar{\mathfrak D}\cdot\overline{\mathfrak G^*}\subset\mathfrak H)}\,(\bar M)}{\nu\to[(\mathfrak A+\mathfrak C)\cdot\bar{\mathfrak D}\cdot\overline{\mathfrak G^*}\subset\mathfrak H]}\,(\overline{OEA}).$$

§ 33². *In LM läszt sich jede (affirmative) Sequenz* $\nu\to\mathfrak A$, *bei der* $\mathfrak A$ λ

und ν nicht enthält, ohne Benutzung von Schema Q ableiten; dazu genügt eine Sequenzenreihe, bei der:

I. *am Anfang jeder auftretenden Sequenz $\nu \to$ steht;*

II. *in jeder solchen Sequenz $\nu \to \mathfrak{B}$ die Formel $\mathfrak{B}$ ν nicht enthält (λ darf vorkommen);*

III. *die ausschlieszliche Anwendung der Schluszschemata $\overline{P}$, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{M}$, $\overline{UES}$, $\overline{UEA}$, $\overline{FES}$, $\overline{FEA}$, $\overline{OES}$, $\overline{OEA}$, $\overline{NES}$, $\overline{NEA}$, die bzw. aus $P, A_1, \ldots, NEA$ dadurch hervorgehen, dasz in jeder Ober- und Untersequenz $\to$ in $\subset$ geändert, und dabei $\nu \to$ vor der Sequenz gesetzt wird, zu $\nu \to [(X_n \subset \subset X_n) \subset \mathfrak{A}]$ führt (mit X_n nicht in $\mathfrak{A}$ vorkommend); Einsetzungen bleiben auf solche in $\overline{P}$ beschränkt*[75]*;*

IV. *der letzte Schlusz von $\nu \to [(X_n \subset X_n) \subset \mathfrak{A}]$ und $\nu \to (X_n \subset X_n)$ zu $\nu \to \mathfrak{A}$ führt; nur an dieser Stelle wird das Abtrennungsschema $\overline{A}$ angewandt.*

Hauptsatz fur LM: *Zu jeder Sequenz $\nu \to \mathfrak{A}$, bei der $\mathfrak{A}$ λ und ν nicht enthält*[76]*, gibt es eine Herleitungsreihe mit den eben genannten Eigenschaften I—IV. Diese Reihe läszt sich derart umwandeln, dasz I, II, IV ungeändert bleiben, dagegen unter III $\overline{M}$ gestrichen werden kann*[77]*.*

Der Beweis ist eine Erweiterung des Beweises für den Hauptsatz in LG_2.

Zu den Fällen γ_1—γ_4 kommt:

Fall γ_5. Die Mischformel $\mathfrak{B}$ hat die Gestalt $\mathfrak{A}'$, und sei nicht eingeführt wie unter γ_1. Das Ende der Herleitung lautet:

$$\frac{\dfrac{\nu \to [\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \lambda]}{\nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{A}')}\,(\overline{NES}) \qquad \dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{A})}{\nu \to (\mathfrak{A}' \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \lambda)}\,(\overline{NEA})}{\nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \lambda)}\,(\overline{M}).$$

Umwandlung (mit Graderniedrigung):

$$\frac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{A}) \qquad\qquad\qquad \nu \to [\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \lambda]}{\dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \lambda)}{\nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \lambda)}\,(\overline{A}_1, \overline{A}_3) \quad \text{oder:} \quad \dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \lambda)}{\nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \subset \lambda)}\,(\overline{A}_3)}\,(\overline{M})$$

Im Falle b_2 kommen hinzu:

$$\frac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \dfrac{\nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{A})}{\nu \to (\mathfrak{A}' \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \lambda)}\,(\overline{NEA})}{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \cdot \mathfrak{A}' \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \lambda) \text{ oder } \nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \lambda),}\,(\overline{M})$$

je nachdem $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{B}$ verschieden ist oder nicht;

$$\text{und:} \quad \frac{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{B}) \qquad \dfrac{\nu \to (\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{C}} \subset \lambda)}{\nu \to (\overline{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{A}')}\,(\overline{NES})}{\nu \to (\overline{\mathfrak{D}} \cdot \overline{\mathfrak{C}^*} \subset \mathfrak{A}')}\,(\overline{M}).$$

---

[75]) Siehe Satz 12; vergl. die Fusznoten 16, 26 u. 33.

[76]) Ihre Klasse ist dieselbe wie die der Theoreme im JOHANSSONschen Minimalkalkül. Vergl. § 6^{bis}.

[77]) Die Formel λ kann mit $\overline{NES}$ eliminiert werden. Vergl. Fuszn. 68.

Die zugehörigen Umwandlungen (mit Rangerniedrigungen) sind bzw.:

1°

$$\frac{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\subset\mathfrak{B})\qquad\qquad\qquad\nu\to(\overline{\mathfrak{C}}\subset\mathfrak{A})}{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\mathfrak{A})\,;\qquad\text{oder:}\qquad\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\mathfrak{A})}\;(\overline{M})$$

$$\cfrac{\cfrac{(\mathfrak{A}'\text{ u. }\mathfrak{B}\text{ verschieden})}{\nu\to[\mathfrak{A}'\cdot\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\lambda]}\;(\overline{NEA})}{\nu\to[\overline{\mathfrak{D}}\cdot\mathfrak{A}'\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\lambda]}\;(\overline{A}_3)$$

$$\cfrac{\cfrac{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\subset\mathfrak{A}')\qquad\cfrac{(\mathfrak{A}'\text{ u. }\mathfrak{B}\text{ gleich})}{\nu\to[\mathfrak{A}'\cdot\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\lambda]}\;(\overline{NEA})}{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\lambda)}\;(\overline{M})}{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\lambda)}\;(\overline{A}_3,\ \overline{A}_2);$$

2°

$$\frac{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\subset\mathfrak{B})\qquad\qquad\qquad\nu\to(\mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{C}}\subset\lambda)}{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\cdot\mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\lambda)\qquad\text{oder:}\qquad\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\lambda)}\;(\overline{M})$$

$$\frac{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\cdot\mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\lambda)}{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\mathfrak{A}')}\;(\overline{A}_3,\ \overline{NES})$$

$$\cfrac{\cfrac{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\lambda)}{\nu\to(\mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\lambda)}\;(\overline{A}_1)}{\nu\to(\overline{\mathfrak{D}}\cdot\overline{\mathfrak{C}^*}\subset\mathfrak{A}')}\;(\overline{NES})$$

je nachdem $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ verschieden sind, oder nicht.

Bemerkung. Nach Fuszn. 37 läszt sich in jeder Sequenzenreihe, welche sich gemäsz dem Hauptsatz dieses Par. bilden läszt, λ durch $Y'_m\cdot Y''_m$ ersetzen, wobei es immer möglich ist m so zu wählen, *dasz* Y_m *nicht zu den in der Sequenzenreihe vorkommenden elementaren Kalkülformeln gehört.* Das kommt darauf hinaus, dasz man $\overline{NES}$ und $\overline{NEA}$ unter III durch folgende Schemata ersetzt:

$$\overline{\overline{NES}}.\ \frac{\nu\to[\mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{B}}\subset(Y'_m\cdot Y''_m)]}{\nu\to(\overline{\mathfrak{B}}\subset\mathfrak{A}')};\qquad\overline{\overline{NEA}}.\ \frac{\nu\to(\overline{\mathfrak{B}}\subset\mathfrak{A})}{\nu\to[\mathfrak{A}'\cdot\overline{\mathfrak{B}}\subset(Y'_m\cdot Y''_m)]}.$$

Im Endresultat (in der letzten Sequenz) kommen Y'_m und Y''_m nicht vor.