MATHEMATICS

ESPACES LINÉAIRES À UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE DE COORDONNÉES

PAR

A. F. MONNA

(Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE at the meeting of Sept. 30, 1950)

Introduction

Dans une série d'articles [1]) KÖTHE — en partie en collaboration avec TOEPLITZ — a développé une théorie concernant les espaces linéaires dont les points sont des suites de nombres complexes $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$. Cette théorie, qui ne fait pas usage d'une métrique, a un caractère tout à fait différent de celui de la théorie abstraite des espaces de BANACH qui est d'ailleurs métrique. Récemment j'ai donnée une extension de cette dernière théorie — qui n'était développée que pour le cas où les coëfficients sont des nombres réels ou complexes ou, ce qui revient au même, appartiennent à un corps muni d'une valuation archimédienne — pour le cas où les coëfficients appartiennent à un corps muni d'une valuation non-archimédienne [2]). Il me semble donc qu'il n'est pas sans intéresse à rechercher ce que devient de la théorie de KÖTHE et TOEPLITZ si les coordonnées des points sont pris dans un corps muni d'une valuation non-archimédienne. Remarquons en outre que, dans le cas des nombres réels, l'espace dual au sens de la théorie de K. et T. aussi bien que l'espace conjugué de la théorie des espaces de BANACH apparaîssent comme des cas particuliers d'une notion d'espace conjugué, introduit par BIRKHOFF dans la théorie des structures vectorielles (vector-lattices) [3]). Il semble donc utile d'étudier la théorie de K. et T. avant d'aborder l'étude de la théorie de BIRKHOFF par rapport à des corps plus généraux que celui des nombres réels.

Dans ce qui suit nous ne donnerons que les traits fondamentaux de la théorie et nous n'insisterons pas sur le développement de la théorie tel qu'il a été donné par KÖTHE. En conséquence le nombre des conditions,

---

1) G. KÖTHE und O. TOEPLITZ, Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen. Journal f. reine u. angew. Math. 171, 193—226 (1934). Cité par K. et T.

G. KÖTHE, Die Teilräume eines linearen Koordinatenraumes. Math. Ann. 114, 99—125 (1937).

G. KÖTHE, Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Journal f. reine u. angew. Math. 178, 193—213 (1938). Cité par K 2.

2) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 49, 1045—1055, 1056—1062, 1134—1141, 1142—1152 (1946); 51, 197—210 (1948); 52, 151—160 (1949).

3) G. BIRKHOFF, Lattice theory, p. 246, New York (1948).

imposées au corps K où appartiennent les coëfficients, sera aussi peu que possible. En particulier on ne suppose pas que K soit localement-compact.

On verra qu'un nombre de résultats prennent une forme plus simple. Les démonstrations ne seront pas données si on peut les prendre de K. et T. sans modifications essentielles.

I. *Propriétés topologiques*

1. 1. Soit K un corps muni d'une valuation non-archimédienne. Bien qu'il ne soit pas nécessaire pour tout ce qui suit, nous supposons que K est complet.

Définition 1. *Les espaces linéaires λ que nous allons considérer sont des ensembles d'éléments $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, où $x_i \in K$, tel que si $\mathfrak{x} \in \lambda$, $\mathfrak{y} \in \lambda$, on a $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = (x_1 + y_1, \ldots) \in \lambda$ et $a\mathfrak{x} = (ax_1, ax_2, \ldots) \in \lambda$ pour tout $a \in K$.*

Définition 2. *Appelons l'espace dual λ^* de λ l'espace linéaire dont les points sont les suites $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots)$ $(u_i \in K)$ telles que la série $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = \sum u_i x_i$ converge pour tout $\mathfrak{x} \in \lambda$.*

Ici Köthe et Toeplitz, donc dans le cas des nombres complexes, exigent la convergence absolue de la série $\sum u_i x_i$, puisque le cas de convergence ordinaire conduit à une théorie moins satisfaisante. Ces objections ne se présentent pas dans le cas non-archimédien. La condition de la convergence de $\sum u_i x_i$ est équivalente avec la condition $u_i x_i \to 0$ si $i \to \infty$. La convergence de $\sum |u_i x_i|$ implique donc la convergence de $\sum u_i x_i$. La théorie fondée sur la définition 2 renferme donc la théorie fondée sur la convergence absolue.

Supposons que la valuation de K soit triviale. La condition $u_i x_i \to 0$ se réduit alors à $u_i x_i = 0$ pour toutes les valeurs suffisamment grandes de i. Seulement des séries limitées doivent donc être considéré comme convergente et ils ne se présentent plus des raisonnements de convergence proprement dits. Les topologies que nous introduisons plus tard se réduisent dans ce cas à une topologie discrète. C'est pourquoi que nous supposons dans tout ce qui suit que la valuation de K ne soit pas triviale (voir une remarque dans IV concernant les "espaces dépourvus de convergence" (konvergenzfreie Räume)).

1. 2. $\lambda \subset \lambda^{**}$.

1. 3. $\lambda^{***} = \lambda^*$.

2. 1. Définition 3. *L'espace λ est appelé parfait ("vollkommen") si*

$$\lambda^{**} = \lambda$$

Il n'y a pas de danger de confondre cette dénomination avec la notion d'ensemble parfait qui ne paraît pas dans tout ce qui suit.

2. 2. φ étant l'espace dont les points sont les suites n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées $\neq 0$, on a $\varphi \subset \lambda$ si λ est parfait.

3. 1. Définition 4. *L'espace λ est appelé normal si $\mathfrak{x} \in \lambda$ et $|y_i| \leqq |x_i|$ entraînent $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in \lambda$.*

3. 2. Chaque espace parfait est normal.

Remarque. Cette propriété n'est pas vraie dans la théorie fondée sur les nombres complexes et la convergence ordinaire.

4. 1. Définition 5. *La suite $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots$ dans λ est appelée faiblement convergente si la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\, \mathfrak{x}^{(n)}$$

existe pour tout $\mathfrak{u} \in \lambda^*$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\, \mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{u}\, \mathfrak{x}$$

pour tout $\mathfrak{u} \in \lambda^*$, alors $\mathfrak{x}$ est appelé la limite faible de la suite.

4. 2. $\mathfrak{x}^{(n)}$ étant une suite faiblement convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)}$ existe pour tout i.

5. 1. Définition 6. *Un espace est appelé faiblement complet si chaque suite faiblement convergente dans cet espace possède une limite faible.*

5. 2. *Chaque espace parfait est faiblement complet.*

Démontrons d'abord le théorème auxiliaire suivant.

Soit $\mathfrak{x}^{(n)}$ une suite faiblement convergente. Alors pour tout $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ et $\varepsilon > 0$ il existe un $N(\varepsilon, \mathfrak{u})$ tel que

$$\sup_{1\leqq i<\infty} |u_i|\, |x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| \leqq \varepsilon$$

pour $p, q \geqq N(\varepsilon, \mathfrak{u})$.

Démonstration. Supposons que ceci n'est pas vrai. Il existe alors un $\varepsilon > 0$, un $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ et une suite d'indices p_j, q_j tel que

$$\sup_{1\leqq i<\infty} |u_i|\, |x_i^{(p_j)} - x_i^{(q_j)}| > \varepsilon. \tag{1}$$

Choisissons N_1 tel que

$$\sup_{N_1+1\leqq i<\infty} |u_i|\, |x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)}| \leqq \varepsilon. \tag{2}$$

Cela est possible puisque la série

$$\sum u_i\, (x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)})$$

est convergente de sorte qu'on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de i,

$$|u_i|\, |x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)}| \leqq \varepsilon.$$

(1) et (2) entraînent

$$\sup_{1\leqq i\leqq N_1} |u_i|\, |x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)}| > \varepsilon. \tag{3}$$

Nous allons introduire un nouveau vecteur $\mathfrak{v} = (v_1, v_2, \ldots)$ dans λ^* dont les coordonnées, satisfaisant à $|v_i| \leqq |u_i|$, seront déterminées successivement. D'abord déterminons les $v_i (1 \leqq i \leqq N_1)$ tels que

$$\Big|\sum_{i=1}^{N_1} v_i\, (x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)})\Big| = \sup_{1\leqq i\leqq N_1} |u_i|\, |x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)}|. \tag{4}$$

Remarquons que dans la formule générale

$$|\alpha+\beta+\dots| \leqq \max(|\alpha|,|\beta|,\dots)$$

on a certainement l'égalité si parmi les termes $\alpha, \beta, \dots$ la terme à valeur maximale ne paraît qu'une seule fois. On peut donc atteindre la formule (4) par un changement convenable des $u_i (1 \leqq i \leqq N_1)$, effectuant une réduction des valeurs de ces coordonnées, cependant en restant invariante la (ou une) terme à valeur maximale. On a alors

$$(5) \qquad \Big|\sum_{i=1}^{N_1} v_i (x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)})\Big| > \varepsilon.$$

Quelque soient $v_i (N_1 + 1 \leqq i < \infty)$, pourvu que $|v_i| \leqq |u_i|$, on a en vertu de (2)

$$\Big|\sum_{N_1+1}^{\infty} v_i (x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)})\Big| \leqq \sup_i |v_i|\ |x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)}| \leqq$$
$$\leqq \sup_i |u_i|\ |x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)}| \leqq \varepsilon.$$

On en tire, en tenant compte de (5)

$$(6) \qquad \Big|\sum_{i=1}^{\infty} v_i (x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)})\Big| = \max\Big[\Big|\sum_{i=1}^{N_1} \dots\Big|, \Big|\sum_{N_1+1}^{\infty} \dots\Big|\Big] > \varepsilon.$$

N_1 étant choisi, puisque la suite $\mathfrak{x}^{(n)}$ converge par coordonnées (voir 4. 2) on peut déterminer $j_2 < j_1 = 1$ tel que

$$(7) \qquad \sup_{1 \leqq i \leqq N_1} |u_i|\ |x_i^{(p_{j_2})} - x^{(q_{j_2})}| \leqq \varepsilon.$$

A fortiori cette inégalité est vraie si on remplace les u_i par v_i pourvu que $|v_i| \leqq |u_i|$.

Déterminons alors $N_2 > N_1$ tel que

$$(8) \qquad \sup_{N_2+1 \leqq i < \infty} |u_i|\ |x_i^{(p_{j_2})} - x_i^{(q_{j_2})}| \leqq \varepsilon.$$

Cette inégalité reste vraie pour des $|v_i| \leqq |u_i|$. En vertu de (1) on a

$$(9) \qquad \sup_{1 \leqq i \leqq N_2} |u_i|\ |x_i^{(p_{j_2})} - x^{(q_{j_2})}| > \varepsilon,$$

et avec (7) donc

$$(10) \qquad \sup_{N_1+1 \leqq i \leqq N_2} |u_i|\ |x_i^{(p_{j_2})} - x_i^{(q_{j_2})}| > \varepsilon.$$

On peut déterminer $v_{N_1+1}, \dots, v_{N_2}$ tel que

$$\Big|\sum_{N_1+1}^{N_2} v_i (x_i^{(p_{j_2})} - x_i^{(q_{j_2})})\Big| = \sup_{N_1+1 \leqq i \leqq N_2} |u_i|\ |x_i^{(p_{j_2})} - x_i^{(q_{j_2})}| > \varepsilon.$$

Il suit de (7) et (8), les $v_i (i > N_2)$ restant indéterminés pourvu que $|v_i| \leqq |u_i|$,

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty} v_i (x_i^{(p_{j_2})} - x_i^{(q_{j_2})})\Big| = \max\Big[\Big|\sum_{1}^{N_1}\Big|, \Big|\sum_{N_1+1}^{N_2}\Big|, \Big|\sum_{N_2+1}^{\infty}\Big|\Big] > \varepsilon.$$

En continuant ainsi on construit un vecteur $\mathfrak{v} = (v_1, v_2, \ldots)$ et $|v_i| \leqq |u_i|$. Il suit de 1. 3 et 3. 2 que $\mathfrak{v}$ appartient à λ^*. Pour $a = 1, 2, \ldots$ on a donc

$$|\mathfrak{v}(\mathfrak{x}^{(p_{ja})} - \mathfrak{x}^{(q_{ja})})| > \varepsilon,$$

ce qui est en contradiction avec la convergence faible de la suite $\mathfrak{x}^{(n)}$.

Remarque. Pour ce théorème auxiliaire il suffit que l'espace λ est normal.

La démonstration que chaque espace parfait est faiblement complet va maintenant comme il suit.

Soit $\{\mathfrak{x}^{(n)}\}$ une suite faiblement convergente et soit $\mathfrak{u} \in \lambda^*$. En vertu du théorème auxiliaire on a pour chaque valeur de m

$$\sup_{1 \leqq i \leqq m} |u_i| \; |x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| \leqq \varepsilon.$$

Puisque $\lim\limits_{p \to \infty} x_i^{(p)} = x_i$ existe, on a $|x_i^{(p)}| \to |x_i|$ et, si q est fixé,

$$|x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| \to |x_i - x_i^{(q)}|.$$

Si $x_i - x_i^{(q)} \neq 0$ on a même à partir d'une certaine valeur de p

$$|x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| = |x_i - x_i^{(q)}|.$$

Donc

$$\sup_{1 \leqq i \leqq m} |u_i| \; |x_i - x_i^{(q)}| \leqq \varepsilon$$

et si $m \to \infty$

$$\sup_{1 \leqq i < \infty} |u_i| \; |x_i - x_i^{(q)}| \leqq \varepsilon.$$

Ensuite

$$|u_i x_i| = |u_i| \; |x_i - x_i^{(q)} + x_i^{(q)}| \leqq \max[|u_i| \; |x_i - x_i^{(q)}|, \; |u_i| \; |x_i^{(q)}|] \leqq$$
$$\leqq \max[\varepsilon, \; |u_i| \; |x_i^{(q)}|].$$

Puisque la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i \, x_i^{(q)}$$

converge, $u_i x_i^{(q)}$ tend vers 0, donc aussi $u_i x_i \to 0$ de sorte que $\sum u_i x_i$ converge pour tout $\mathfrak{u} \in \lambda^*$. Donc $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \lambda^{**} = \lambda$. On montre alors d'une façon analogue que $\mathfrak{x}$ est la limite faible de $\mathfrak{x}^{(n)}$:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{x}.$$

Remarque. La démonstration ci-dessus est construite en analogie avec la démonstration de KÖTHE et TOEPLITZ. Ces auteurs montrent par un exemple (qu'on ne peut pas transposer dans notre cas), en restant dans le cas des nombres complexes, que la propriété n'est plus vraie si on remplace la convergence absolue par la convergence ordinaire. La propriété 5. 2 est essentielle pour une grande partie de la théorie (voir la partie III).

6. 1. L'introduction d'une topologie faible, dont la notion correspondante de limite coïncide avec la limite faible, peut se faire comme chez KÖTHE (*K* 2).

Définition 7. *Un ensemble $N \subset \lambda$ est appelé borné si pour tout $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ il existe un nombre réel $k(\mathfrak{u})$ tel que*

$$|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq k(\mathfrak{u})$$

pour tout $\mathfrak{x} \in N$.

Définition 8. *Soit M un ensemble borné dans λ^*. Posons pour $\mathfrak{x} \in \lambda$*

$$\sup_{\mathfrak{v} \in M} |\mathfrak{v}\mathfrak{x}| = (\mathfrak{x})_M .$$

L'ensemble M est appelé fortement borné si

$$\lim_{n \to \infty} (\mathfrak{x}^{(n)})_M = 0$$

pour chaque suite dans λ qui converge faiblement vers 0.

Définition 9. *Soient M un ensemble fortement borné dans λ^*, $\mathfrak{x} \in \lambda$ et $\varepsilon > 0$. Alors, par définition, l'ensemble des points $\mathfrak{y} \in \lambda$ tels que*

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})_M < \varepsilon$$

est un voisinage faible de $\mathfrak{x}$.

On montre que, par cette topologie, λ devient un espace de HAUSDORFF. En posant

$$\sup_{1 \leqq i < \infty} |u_i x_i| = [\mathfrak{u}\mathfrak{x}],$$

$$\sup_{\mathfrak{v} \in M} [\mathfrak{u}\mathfrak{x}] = [\mathfrak{x}]_M ,$$

les ensembles, définis par les inégalités

$$[\mathfrak{x} - \mathfrak{y}]_M < \varepsilon$$

constituent un système de voisinages qui est équivalent à la topologie faible.

Un ensemble dans λ est borné si et seulement s'il existe un nombre $k(\mathfrak{u})$ tel que

$$[\mathfrak{u}\mathfrak{x}] \leqq k(\mathfrak{u})$$

pour tout $\mathfrak{u} \in \lambda^*$.

6. 2. Un espace λ, muni de la topologie faible, est 0-dimensionnel. Il suffit de montrer que le voisinage U de 0

$$(\mathfrak{x})_M \leqq \varepsilon,$$

qui est, comme on peut montrer, fermé, est aussi ouvert. Soit $\mathfrak{y}^0 \in U$. Le voisinage

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}^0)_M \leqq \varepsilon$$

est tout entier dans U. En effet

$$(\mathfrak{y})_M = \sup_{\mathfrak{u} \in M} |\mathfrak{u}\mathfrak{y}| = \sup_{\mathfrak{u} \in M} |\mathfrak{u}(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^0) + \mathfrak{u}\mathfrak{y}^0| \leqq$$

$$\leqq \sup_{\mathfrak{u} \in M} [\max(|\mathfrak{u}(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^0)|, |\mathfrak{u}\mathfrak{y}^0|)] \leqq \varepsilon.$$

6. 3. Définition 10. *Soient N un ensemble borné dans λ^*, $\mathfrak{x} \in \lambda$ et $\varepsilon > 0$. Alors, par définition, l'ensemble des points $\mathfrak{y} \in \lambda$ tels que*

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})_N < \varepsilon$$

est un voisinage fort de $\mathfrak{x}$. La topologie ainsi déterminée est la topologie forte.

La limite forte qui correspond à cette topologie peut être définie comme il suit: la suite $\mathfrak{x}^{(n)}$ converge fortement vers $\mathfrak{x}$, si on a

$$\lim_{n\to\infty} (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(n)})_N = 0$$

pour chaque ensemble borné $N \subset \lambda^*$.

Un espace muni de la topologie forte est 0-dimensionnel. Chaque espace parfait est fortement complet.

7. Soit X un ensemble borné dans λ. Alors pour chaque ensemble borné U dans λ^* il existe un nombre $r(U)$ tel que

$$[\mathfrak{u}\mathfrak{x}] \leqq r(U)$$

pour $\mathfrak{x} \in X$, $\mathfrak{u} \in U$.

Avec quelques modifications on peut suivre en principe la démonstration de K. et T.

8. Dans ce qui précède nous avons donné les propriétés topologiques principales des espaces linéaires de la forme considérée qu'on peut déduire sans aucune condition spéciale concernant le corps complet K muni d'une valuation non-archimédienne; en particulier on n'a pas supposé que K est localement-compact. Dans les travaux cités on trouve encore d'autres propriétés topologiques — mentionnons une topologie qui diffère de la topologie faible et de la topologie forte et qui est fondée sur les ensembles bornés faiblement compacts de l'espace dual [4]) — mais la théorie ainsi construite suppose que K est localement compact. C'est par ces méthodes que KÖTHE atteint une théorie satisfaisante. Il n'y a pas de difficultés essentielles dans la transposition de cette théorie dans notre cas. Restant dans le cadre d'une revue générale, nous n'entrons pas dans ces questions. On pourrait rechercher ce que devient de cette théorie plus développée si on fait tomber la supposition que K est localement-compact.

La théorie est indépendant de toute métrique. Remarquons ici que, selon la définition de KÖTHE, un espace de la forme considérée est métrique si 1⁰ la métrique se déduit d'une norme et 2⁰ la convergence métrique est équivalente à la convergence forte (comme dans les espaces de BANACH).

---

[4]) G. KÖTHE, Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen. Math. Ann. 116, 719—732 (1939).

Il y a des espaces qui ne sont pas métriques en ce sens. Il faut bien distinguer cette méthode d'introduire une métrique de la définition d'une métrique dans le produit topologique d'une infinité dénombrable d'espaces métriques. Un tel produit peut toujours être métrisé, cependant en un tout autre sens et en général pas par une norme. En effet, une suite de points de l'espace produit est alors appelée convergente si les coordonnées du même indice forment des suites convergentes. La convergence forte et faible de K. possèdent aussi cette propriété, mais elle ne suffit ni pour la convergence forte ni pour la convergence faible; ces dernières imposent des conditions plus graves (comme dans les espaces de BANACH). Au sens d'un produit topologique les espaces λ sont tous métrisables.

II. *Fonctions linéaires*

1. Une fonction $u(\mathfrak{x})$, prenant ses valeurs dans K sera appelée linéaire si $u(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{x}) + u(\mathfrak{y})$ et $u(r\mathfrak{x}) = ru(\mathfrak{x})$ pour tout $r \in K$. La fonction $u(\mathfrak{x})$ est appelée faiblement, respectivement fortement continue si $u(\mathfrak{x}^{(n)}) \to u(\mathfrak{x})$ pour chaque suite $\mathfrak{x}^{(n)}$ qui converge faiblement, resp. fortement vers $\mathfrak{x}$. KÖTHE introduit encore deux autres notions de continuité, à savoir la continuité faiblement topologique et la continuité fortement topologique. On les définit d'une façon connue au moyen des voisinages faibles respectivement forts. En général les quatres notions ne coïncident pas. Tout ceci ne change pas dans notre cas.

2. Pour tout $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ la fonction $u(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$ est une fonction linéaire dans λ qui est continue au sens de chacune des quatres définitions. La question de l'existence de fonctions linéaires continues qui ne sont pas identiquement égale à 0 est donc ici bien plus simple que pour les espaces de BANACH: dans les espaces de BANACH réels ou complexes ils existent de telles fonctions. Cependant pour les espaces de BANACH non-archimédiens le problème n'a pas encore atteint sa résolution définitive; si la valuation de K est discrète, la réponse est affirmative.

Il y a maintenant deux problèmes. 1⁰ la question si l'ensemble des fonctions linéaires continues est épuisé par les fonctions $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$. 2⁰ le problème de l'extension d'une fonction linéaire continue, qui est définie sur un sous-espace linéaire, sur l'espace tout entier sous la condition que la relation qui exprime que la fonction est bornée doit être gardée.

3. Chaque fonction linéaire faiblement continue ou faiblement topologique est de la forme $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ si $\lambda \supset \varphi$. Remarquons qu'on ne suppose pas, comme le fait K. dans le cas complexe, que λ soit normal. Ceci donne une réponse partielle au problème 1 du numéro précédent: l'espace conjugué faible au sens de la théorie des espaces de BANACH coïncide avec l'espace dual.

Ce théorème n'est plus vrai pour les fonctions fortement continues [5]).

[5]) Il est par exemple en défaut dans l'espace σ_∞ (voir IV). Voir aussi: A. F. MONNA. Over niet-archimedische lineaire ruimten. Versl. Ned. Akad. v. Wetensch. **52**, 308—321 (1943), p. 316, où on a déterminé la forme des fonctionelles linéaires dans l'espace des suites convergentes.

Les démonstrations de K. qui lui permettent de résoudre le premier problème dans ce cas, supposent cependant que K est localement compact (comparer I. 8).

4. Une fonction linéaire $u(\mathfrak{x})$, définie sur un sous-ensemble linéaire $\mu \subset \lambda$ est faiblement (fortement) continue topologique si et seulement s'il existe un ensemble fortement borné (borné) M respectivement N dans λ^* tel que

$$|u(\mathfrak{x})| \leqq (\mathfrak{x})_M \qquad (\mathfrak{x} \in \mu)$$

respectivement

$$|u(\mathfrak{x})| \leqq (\mathfrak{x})_N \qquad (\mathfrak{x} \in \mu).$$

5. Le problème 2 du numéro 2 est ramené au problème correspondant pour les espaces de Banach non-archimédiens. En ce dernier cas l'extension est possible si la valuation de K est discrète. Cependant, si la valuation est partout dense, l'extension n'est pas toujours possible (des critères permettant de décider si ou non l'extension est possible dans ce cas manquent encore). On a alors le théorème suivant.

La valuation de K soit discrète. Soit $u(\mathfrak{x})$ une fonction linéaire, continue faiblement topologique, définie sur un sous-espace linéaire $\mu \subset \lambda$; $\lambda \supset \varphi$. Alors on peut extendre $u(\mathfrak{x})$ à λ tout entier et il existe un $\mathfrak{u} \in \lambda^*$ tel que $u(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$. Une relation

$$|u(\mathfrak{x})| \leqq (\mathfrak{x})_M \qquad (M \subset \lambda^* \text{ fortement borné})$$

valable sur μ, reste vraie sur λ.

Les symboles $(\mathfrak{x})_N$ etc. puissent être remplacés par $[\mathfrak{x}]_N$ etc.

III. *Applications*

1. Suivant K. et T., on a les définitions suivantes.

Définition 1. *La matrice $A = (a_{ik})$ ou la transformation linéaire*

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, x_k$$

est appelée associée à l'espace λ si la série au membre à droite converge pour tout $\mathfrak{x} \in \lambda$ et tout i et si $\mathfrak{y} = A\mathfrak{x}$ appartient à λ. Le système de toutes les matrices associées à λ sera désigné par $\sum(\lambda)$.

Définition 2. *Un ensemble composé de matrices $A = (a_{pq})$ $(p, q = 1, 2, \ldots)$ est appelé un anneau de matrices si les axiomes connues des anneaux sont vérifiées et si pour chaque couple de matrices A et B de cet ensemble toutes les séries $\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, b_{\alpha q}$ convergent.*

Définition 3. *Un anneau M de matrices est appelé maximal s'il n'existe aucun anneau de matrices qui contient M comme vrai sous-anneau.*

On a alors:

Si l'espace λ est parfait, alors $\sum(\lambda)$ est un anneau de matrices maximal.

Remarques. *a.* Les définitions analogues de K. et T. supposent la convergence absolue et dans le cas complexe cela est essentielle pour la validité de cette propriété: par un contre-exemple ils font voir qu'elle est fausse si on ne suppose que la convergence ordinaire. Ici il y a donc une différence essentielle avec le cas non-archimédien. I. 5. 2 est essentiel pour la démonstration

b. Ce théorème exprime pour les espaces parfaits une propriété qui correspond aux "Faltungssätze" de HILBERT dans l'espace de HILBERT (les matrices bornées constituent un anneau).

2. La théorie permet de donner des critères concernant les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. La transposition de ces critères va sans difficultés.

IV. *Espaces spéciaux*

1. Désignons par σ_∞ l'espace des suites $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ telles que $|x_i| \leqq M(\mathfrak{x})$ et par σ l'espace des suites telles que $x_i \to 0$.

On montre facilement les relations

$$\sigma_\infty^* = \sigma$$
$$\sigma^* = \sigma_\infty .$$

Dans σ_∞ et dans σ on peut définir une métrique par

$$\|\mathfrak{x}\| = \sup_i |x_i| .$$

En appliquant I. 7 on montre que dans σ_∞ et σ la convergence forte est bien identique avec la convergence selon cette métrique.

Enfin la convergence forte et la convergence faible coïncident dans σ.

La dernière propriété n'est plus vraie dans σ_∞. Par exemple la suite $\{\mathfrak{e}_n\}$, où $\mathfrak{e}_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$, considéré comme ensemble dans σ_∞ est faiblement convergente vers $(0, 0, \ldots)$. Cependant, cette suite ne converge pas au sens métrique et n'est donc pas fortement convergente.

On peut considérér la suite $\{\mathfrak{e}_n\}$ comme un ensemble dans σ. En faisant ainsi, cette suite n'est pas faiblement convergente. En effet, la limite faible ne pourrait être autre que $(0, 0, \ldots)$. Cependant $\mathfrak{u}\mathfrak{e}_n = u_n$ ne tend pas vers 0 pour chaque $\mathfrak{u} \in \sigma_\infty = \sigma^*$, de sorte que I, définition 5 n'est pas satisfaite. Puisque $\sigma \subset \sigma_\infty$, on voit donc que la convergence faible est une propriété relative: elle dépend de l'espace dont on considère l'ensemble donné comme sous-ensemble.

2. Il n'y a pas d'espaces qui sont duals avec soi-même. Supposons en effet $\lambda = \lambda^*$. Si $\mathfrak{x} \in \lambda$, on tire de I, définition 2, que $x_i^2 \to 0$, donc $x_i \to 0$. Donc $\lambda \subset \sigma$, d'où $\lambda^* \supset \sigma^*$ et donc $\lambda \supset \sigma_\infty$, en contradiction avec $\lambda \subset \sigma$. Dans cette théorie il n'existe donc pas un espace qui est analogue à l'espace de HILBERT.

3. En rapport avec la propriété précédente on peut étudier l'espace σ_r dont les éléments sont les suites $x_1, x_2, \ldots$ telles que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^r \quad (r \geqq 1)$$

converge [6]). En suivant K. et T. appelons un tel espace symmétrique, ce qui veut dire que, si $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ appartient à l'espace, toutes les suites qu'on obtient de $\mathfrak{x}$ par une permutation arbitraire des coordonnées, appartiennent à l'espace.

Montrons d'abord:

L'espace dual λ^* d'un espace symmétrique λ est symmétrique.

Soit $u_1, u_2, \ldots \in \lambda^*$ et soit $v_1, v_2, \ldots$ une suite obtenue par une permutation des coordonnées de $\mathfrak{u}$. Il faut montrer $\mathfrak{v} \in \lambda^*$. Considérons donc la série $v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots$. On ne peut pas obtenir cette série par une permutation des termes de $u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots$. Cependant on peut l'obtenir par une permutation de la série $u_1y_1 + u_2y_2 + \ldots$, où $y_1, y_2, \ldots$ est une suite obtenue par une permutation convenable de $x_1, x_2, \ldots$. Puisque λ est symmétrique, on a $\mathfrak{y} \in \lambda$, de sorte que la série $u_1y_1 + u_1y_2 + \ldots$ est convergente (I, définition 2). Après la permutation on a encore $v_i x_i \to 0$ (démonstration par l'absurde). La série $\sum v_i x_i$ est donc convergente et $\mathfrak{v} \in \lambda^*$.

Montrons ensuite que $\sigma_r^* = \sigma_\infty$.

D'abord on a $\sigma_r \subset \sigma$, donc $\sigma_r^* \supset \sigma^* = \sigma_\infty$. Supposons que σ_r^* a comme élément une suite non-bornée $u_1, u_2, \ldots$. Il y a alors une suite $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots$ telle que

$$|u_{i_n}| > M_n, \quad M_n \to \infty.$$

Cherchons le plus petit indice n tel que $M_n > 1$. Appelons, après une rénumération, u_1 la coordonnée correspondante. Prenons alors la coordonnée d'indice le plus petit tel que $M_n > 2^2$ et appelons la, en rénumérant, u_2. En continuant ainsi on obtient une suite $u_1, u_2, \ldots$ telle que $|u_n| > n^2$. Remplaçons les coordonnées de la suite donnée, qui ne sont pas encore utilisées ainsi, par 0 et posons les entre les coordonnées de la suite qu'on vient de construire de façon qu'il n'y en a qu'un nombre fini entre chaque couple de coordonnées. On trouve

$$\mathfrak{u} = u_1, 0, \ldots, u_2, 0, \ldots, \ldots.$$

σ_r^* étant symmétrique et normal (puisque parfait) on a $\mathfrak{u} \in \sigma_r^*$.

Considérons alors le point

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{u_1}, 0, \ldots, \frac{1}{u_2}, 0, \ldots.$$

On a

$$\sum |x_i|^r = \sum \frac{1}{|u_n|^r} < \sum \frac{1}{n^{2r}},$$

d'où on tire $\mathfrak{x} \in \sigma_r$. Puis on a $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = 1 + 1 + \ldots$, donc une série divergente, en contradiction avec $\mathfrak{u} \in \sigma_r^*$; on a donc bien $\sigma_r^* = \sigma_\infty$.

Remarquons que par

$$\{\sum |x_i|^r\}^{\frac{1}{r}}$$

[6]) On trouve une autre étude de ces espaces dans A. F. MONNA, Over een lineaire P-adische ruimte. Versl. Ned. Akad. v. Wetensch. **52**, 74—82 (1943).

on ne peut pas définir dans σ_r une métrique au sens de la théorie précédente. La raison en est que la convergence forte — avec laquelle doit coïncider, d'après la définition, la convergence métrique — se définit au moyen des ensembles bornés de l'espace dual, en ce cas l'espace σ, le même que l'espace dual de σ_∞. On peut métriser σ_r et σ_∞ par la même métrique, à savoir

$$\sup |x_i| .$$

4. K. et T. introduisent les espaces dépourvus de convergence. Ce sont des espaces λ tels que, si $\mathfrak{x} \in \lambda$, on a $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in \lambda$, où y_i est un élément arbitraire de K si $x_i \neq 0$ et $y_i = 0$ si $x_i = 0$.

K. et T. montrent qu'il est impossible de métriser ces espaces au sens de notre théorie.

Si la valuation de K est triviale, λ^{**} est dépourvu de convergence pour chaque espace λ. Danc ce cas chaque espace parfait est donc dépourvu de convergence. On a dans ce cas $\sigma = \varphi$.